Часть I. Элементы теории поля

Лекция № 1. Скалярное поле

1.1. Определение скалярного и векторного полей

1.1.1. Определение скалярного поля

Предположим, что в каждой точке $M(x, y, z)$ части пространства D задана какая-либо скалярная функция $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$. Тогда говорят, что эта часть пространства является скалярным полем.

Определение 1.1. *Скалярным полем называется часть пространства, в каждой точке которого задана скалярная функция*.

Таким образом, для задания скалярного поля, достаточно задать скалярную функцию в каждой точке D.

Предположим, что заданная нами скалярная функция определяет некоторое физическое явления. Тогда говорят о физическом скалярном поле.

Определение 1.2. *Физическим скалярным полем называется часть пространства, в каждой точке которого задана скалярная функция, определяющая некоторое физическое явление.*

К примеру, мы знаем, как меняется плотность части атмосферы Земли от ее поверхности до определенного расстояния от поверхности. Эту часть пространства мы можем назвать скалярным физическим полем.

Также можно говорить о скалярном физическом поле в пространстве, которое занимает физическое тело, масса которого есть переменная величина. Здесь скалярная функция – функция массы.

Вокруг нас бесчисленное множество скалярных полей. Вспомним о поле атмосферного давления, поле температур, поле влажности воздуха и т.п.

В случае, когда скалярная величина не зависит от времени, употребляют термин «стационарное скалярное поле».

Определение 1.3. *Стационарным скалярным полем называется часть пространства, в каждой точке которого задана скалярная функция, не зависящая от времени.*

Определение 1.4. *Нестационарным скалярным полем называется часть пространства, в каждой точке которого задана скалярная функция, изменяющаяся с течением времени.*

Например, поле плотности массы неоднородного физического тела является стационарным, а поле зависимости температуры окружающей среды от времени суток – нестационарное.

Определение 1.5. *Плоскопараллельным скалярным полем называется часть пространства, в каждой точке которого задана скалярная функция, значение которой зависит только от двух координат.*

Например, функция, определяющая атмосферное давление, зависит от температуры воздуха и массы атмосферы над точкой измерения давления (все остальные параметры ничтожно малы). Таким образом, поле атмосферного давления в нашем задании является плоскопараллельным.

1.1.2. Определение векторного поля

Предположим, что в каждой точке $M(x, y, z)$ части пространства D задана какая-либо векторная функция $\vec{a}(M) = \vec{a}(x, y, z)$. Тогда говорят, что эта часть пространства является векторным полем.

Определение 1.6. *Векторным полем называется часть пространства, в каждой точке которого задана векторная функция.*

Разложим вектор $\vec{a}(M) = \vec{a}(x, y, z)$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ (напомним, что эти вектора являются единичными векторами, определяющими положительное направление осей x, y и z соответственно):

$$\vec{a}(M) = \vec{a}(x, y, z) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

Здесь a_x, a_y и a_z – скалярные функции аргументов x, y и z.

Таким образом, для задания векторного поля необходимо задать три скалярные функции $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$ и $a_z(x, y, z)$.

Если обобщить сказанное выше на n-мерное пространство, то становится очевидным, что для задания n-мерного векторного поля необходимо задать n функций скалярного аргумента в той части пространства, в которой мы рассматриваем данное поле.

Примеров векторных полей вокруг нас очень много. Например, электростатическое поле точечного заряда. Электрический ток, идущий по прямолинейному бесконечному проводу образует плоское магнитное поле. Поле тяготения Земли также является векторным полем.

Позже мы подробнее рассмотрим некоторые из этих полей, а сейчас перейдем к графическим характеристикам скалярного и векторного полей.

1.2. Графические характеристики скалярного и векторного полей

1.2.1. Графическое изображение скалярного поля

Далее ограничимся рассмотрением скалярных функций двух и трех аргументов.

Пусть в каждой точке $M(x, y, z)$ некоторой части пространства задана скалярная функция $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$, то есть задано скалярное поле. Зададим некоторое постоянное число C и построим все точки рассматриваемой части пространства, в которых $\varphi(M) = \varphi(x, y, z) = C$. Мы получим некоторую поверхность.

Определение 1.7. *Поверхность, в каждой точке которой значение скалярной функции $\varphi(x, y, z)$ постоянно, называется поверхностью равного уровня или эквипотенциальной поверхностью.*

Свое название поверхность равного уровня получило из-за того, что физическое явление, определяемое рассматриваемой функцией, происходит во всех ее точках одинаково. Удобнее построить семейство поверхностей равно уровня, на которых функция $\varphi(M)$, определяющая скалярное поле, принимает значение через равные интервалы h, т.е. строим поверхности, где $\varphi(M)=\varphi(x,y,z)=C$, $\varphi(M)=\varphi(x,y,z)=C+h$, $\varphi(M)=\varphi(x,y,z)=C+2h$ и так далее.

Семейство таких поверхностей и служит геометрическим изображением скалярного поля.

Эквипотенциальными поверхностями плоскопараллельного поля будут цилиндрические поверхности $\varphi(x,y)=C$ с направляющими линиями, расположенными в плоскости xOy. Эти линии (направляющие) и могут служить геометрическими изображениями плоскопараллельного поля.

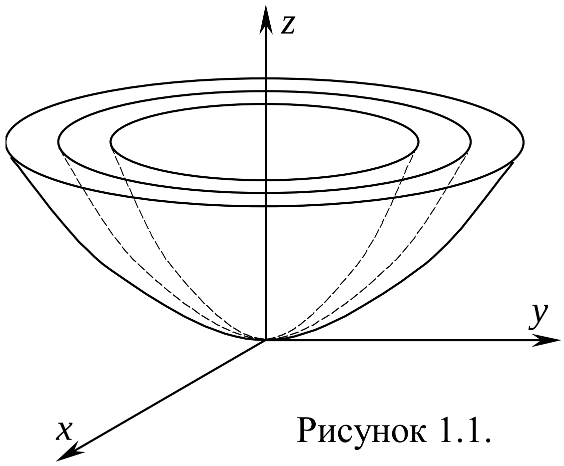


Рисунок 1.1.

Семейство поверхностей разного уровня дает наглядное представление о скорости изменения поля: где эти поверхности расположены близко друг от друга, там скорость изменения поля будет больше, чем там, где эти поверхности располагаются дальше друг от друга.

Пример 1.1. Построим семейство эквипотенциальных поверхностей скалярного поля $\varphi(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2}$.

Уравнения таких поверхностей $\dfrac{z}{x^2+y^2}=C$ или $z=C\left(x^2+y^2\right)$. Это параболоиды вращения, изображенные на рисунке 1.1, исключая точку $(0,0,0)$.

Из рисунка 1.1. видно, что скорость изменения поля будет тем больше, чем ближе к началу координат (поле в начале координат не определено).

1.2.2. Графическое изображение векторного поля

Для графического изображения векторного поля применяют так называемые векторные или силовые линии.

Определение 1.8. *Векторной линией векторного поля называется кривая, в каждой точке которой касательная к ней совпадает с направлением векторного поля в точке касания.*

Отсюда следует физический смысл векторных линий – *векторные линии определяют в каждой точке направление векторного поля.*

Найдем систему дифференциальных уравнений, определяющую векторные линии поля.

Если $\vec{r}$ – радиус-вектор заданной векторной линии, то направление вектора $d\vec{r}=\vec{i}\,dx+\vec{j}\,dy+\vec{k}\,dz$ совпадает с направлением касательной к данной векторной линии. Векторы $\vec{a}(M)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $d\vec{r}=\vec{i}\,dx+\vec{j}\,dy+\vec{k}\,dz$ коллинеарны согласно определению 1.1.8. Проекции коллинеарных векторов пропорциональны, следовательно, должно выполняться соотношение

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}. \qquad (1.1)$$

Соотношение (1.1.1) дает систему дифференциальных уравнений векторных линий. Уравнения векторных линий получаются в результате решения этой системы.

Пример 1.2. По закону Ньютона напряженность $f(M)$ поля тяготения (сила притяжения, действующая на единичную массу в точке M), порождаемая точечной массой m, определяется формулой $\vec{f}(M) = -\frac{m}{r^3}\vec{r}$, где предполагается, что масса m располагается в начале выбранной системы координат, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки M.

Поле тяготения – векторное поле, определенное для всех точек пространства, за исключением начала координат, где $x = y = z = r = 0$. Векторные поля $\vec{f}(M)$ и $\vec{r} = -\frac{r^3}{m}\vec{f}(M)$ имеют одинаковые векторные линии, поскольку $-\frac{r^3}{m}$ – скалярная величина, поэтому векторы $\vec{f}(M)$ и $\vec{r}$ коллинеарны. Поэтому для решения поставленной задачи достаточно найти векторные линии поля радиус-вектора $\vec{r}$ точки $M(x, y, z)$.

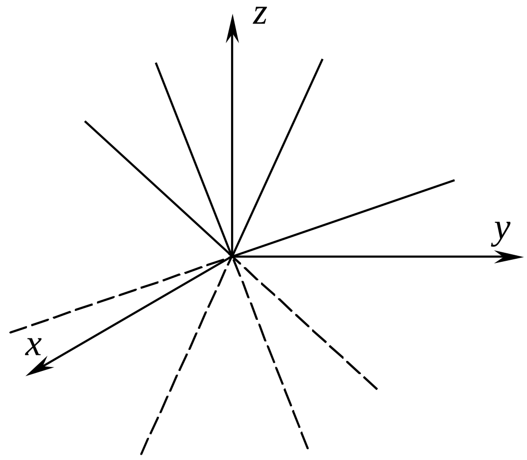


Рисунок 1.2.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Согласно соотношению (1.1) дифференциальные уравнения векторного поля $\vec{r}(M)$ имеют вид:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y}, \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{z}. \end{cases}$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$\begin{cases} \ln x = \ln y - \ln C_1, \\ \ln x = \ln z - \ln C_2. \end{cases}$$

Отсюда, согласно формуле логарифма суммы,

$$\begin{cases} \ln y = \ln C_1 x, \\ \ln z = \ln C_2 x. \end{cases}$$

И, наконец, после экспоненцирования

$$\begin{cases} y = C_1 x, \\ z = C_2 x. \end{cases}$$

Положим $C_1 = \dfrac{n}{m}$, $C_2 = \dfrac{p}{m}$, получим

$$\begin{cases} y = \dfrac{n}{m} x, \\ z = \dfrac{p}{m} x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{n} = \dfrac{x}{m}, \\ \dfrac{z}{p} = \dfrac{x}{m}, \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p}$$ – семейство прямых, проходящих через начало координат (рисунок 1.2).

Лекция № 2. Производная скалярного поля по направлению и градиент скалярного поля

2.1. Производная скалярного поля по направлению

Пусть функция $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$ образует некоторое скалярное поле. Проведем в этом поле произвольную кривую l (рисунок 2.1). Возьмем точку $M(x, y, z)$, принадлежащую кривой l, и проведем через нее касательную к этой кривой. Возьмем на касательной единичный вектор $\vec{l}_0$. Обозначим углы, образованные вектором $\vec{l}_0$ с осями x, y и z соответственно α, β и γ. Так как длина вектора $\vec{l}_0$ равна единице, то проекции на оси координат вектора $\vec{l}_0$ будут соответственно равны $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$ и вектор $\vec{l}_0$ выразится через базис векторов следующим образом:

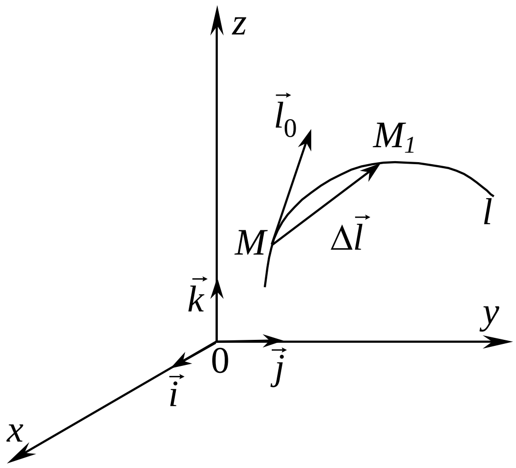


Рисунок 2.1.

$$\vec{l}_0 = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma .$$

Возьмем на кривой l на расстоянии Δl от точки M произвольную точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

Разность $\Delta\varphi(M) = \varphi(M_1) - \varphi(M)$ определяет изменение (или приращение) поля φ при переходе от точки M к точке M_1, а отношение $\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta l} = \dfrac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{\Delta l}$ есть средняя скорость изменения поля φ на участке Δl.

Определение 2.1. *Предел средней скорости изменения поля* $\varphi(M)$ *при* $\Delta l \to 0$ *называется производной скалярного поля в точке M по данному направлению* $\vec{l}_0$, *если такой предел существует и конечен:*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{\Delta l}.$$

Физический смысл производной по направлению

Производная $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ есть предел средней скорости изменения поля. Таким образом, производная скалярного поля φ по направлению вектора $\vec{l}_0$ в точке $M(x, y, z)$ определяет скорость изменения поля φ в данной точке $M(x, y, z)$ в данном направлении $\vec{l}_0$. Таким образом, если $\frac{\partial\varphi}{\partial l} > 0$, то скалярное поле φ возрастает при переходе вдоль $\vec{l}_0$ через точку M, а если $\frac{\partial\varphi}{\partial l} < 0$ убывает. Чем больше производная по направлению по абсолютной величине, тем скорее возрастает или убывает данное скалярное поле.

Инвариантность производной по направлению

Отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M)}{\Delta l}$ не зависит от выбора системы координат. Следовательно, предел этого отношения $\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$ также не зависит от выбора координатной системы. Поэтому можно говорить о том, что *производная по направлению есть понятие инвариантное*.

* * *

Вычислять производную по направлению через предел отношения приращения функции к приращению аргумента не всегда удобно. Следующая теорема установит формулу для вычисления производной по направлению, а также решит вопрос о ее существовании.

Теорема 2.1. *Если функция* $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$ *дифференцируема в точке* M, *то производная поля функции* $\varphi(M)$ *в точке* M *по любому направлению*

$$\vec{l}_0 = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$$

существует и равна:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma. \tag{2.1}$$

Доказательство. Как известно из курса дифференциального исчисления функции, приращение дифференцируемой функции нескольких переменных $\varphi(M)$ представимо в виде:

$$\Delta\varphi(M) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Delta z + \varepsilon(\Delta x, \Delta y, \Delta z)\Delta l, \tag{2.2}$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\Delta l \to 0$, а Δx, Δy, Δz – проекции вектора $\Delta\vec{l} = \overrightarrow{MM_1}$ (рисунок 2.1) на оси координат. Разделим на Δl обе части равенства (2.2), получим:

$$\frac{\Delta\varphi(M)}{\Delta l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta l} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta l} + \varepsilon(\Delta x, \Delta y, \Delta z).$$

Далее перейдем к пределу при $\Delta l \to 0$. По определению касательной к кривой вектор $\Delta\vec{l} = \overrightarrow{MM_1}$ в пределе совпадает с касательным вектором $\vec{l}_0$ к кривой. Поэтому

$$\lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta l} = \cos\alpha; \quad \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta l} = \cos\beta; \quad \lim_{\Delta l \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta l} = \cos\gamma; \quad \lim_{\Delta l \to 0}\varepsilon = 0.$$

Таким образом, получим:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma,$$ что и требовалось доказать.

Производные по направлению базисных векторов

Найдем производную φ по направлению вектора $\vec{i}$. Для этого положим в формуле (2.1) $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \dfrac{\pi}{2}$; получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{i}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos 0 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

Аналогично вычисляются производные по направлению базисных векторов $\vec{j}$ и $\vec{k}$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{j}} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{k}} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Итак, *производные скалярного поля $\varphi(x, y, z)$ про направлению базисных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ совпадают с обычными частными производными функции $\varphi(x, y, z)$ по соответствующим переменным x, y и z.*

Производная по направлению в плоскопараллельном поле

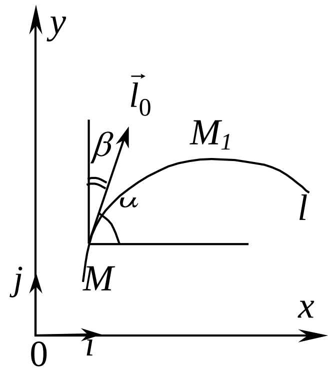


Рисунок 2.2.

В случае плоскопараллельного поля функция φ не зависит от z, поэтому

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta.$$

Поскольку α и β – углы, образованные вектором $\vec{l}_0$ с осями x и y (рисунок 2.2), то $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, отсюда $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, тогда $\cos\beta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ и поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\sin\alpha \qquad (2.3)$$

Формула (2.3) определяет производную по направлению в плоскопараллельном поле в случае задания только одного угла между положительным направлением оси x и вектором $\vec{l}_0$. Аналогично можно определить формулу производной по направлению в случае задания угла между вектором $\vec{l}_0$ и положительным направлением оси y.

Пример 2.1. Найдем производную поля $\varphi(M) = x^2 y - 3xyz + z^2 y$ в точке $M_0(1{,}1{,}1)$ по направлению вектора $\vec{l}_0$ образующего с координатными осями x и y соответственно углы $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, а с осью z угол $\gamma > \frac{\pi}{2}$.

Сначала вычислим направляющие косинусы:

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2};$$

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

Из равенства $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ найдем $\cos\gamma$.

Поскольку $\gamma > \frac{\pi}{2}$, то $\cos\gamma$ должен быть отрицательным и

$$\cos\gamma = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta} = -\sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Найдем значение частных производных функции $\varphi(x, y, z)$ в точке M_0:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy - 3yz, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(M_0) = 2\cdot1\cdot1 - 3\cdot1\cdot1 = -1;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 - 3xz + z^2, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0) = 1^2 - 3\cdot1\cdot1 + 1^2 = -1;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -3xy + 2zy, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z}(M_0) = -3\cdot1\cdot1 + 2\cdot1\cdot1 = -1.$$

По формуле (2.1) получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cos\gamma = -1\cdot\frac{1}{2} - 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2.2. Градиент скалярного поля

Пусть задана функция $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$, образующая скалярное поле.

Определение 2.2. *Градиентом скалярного поля $\varphi(M)$ в точке M называется вектор, координаты которого суть частные производные функции $\varphi(M)$, то есть*

$$grad\,\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \qquad (2.4)$$

Следующая теорема дает физический смысл градиента.

Теорема 2.2. *Градиент скалярного поля $\varphi(M)$ в точке M направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности, проходящей через точку M в сторону возрастания поля и численно равен производной поля по направлению нормали $\vec{n}_0$. Градиент скалярного поля показывает в точке M направление, в котором скорость изменения поля (то есть производная по направлению) наибольшая.*

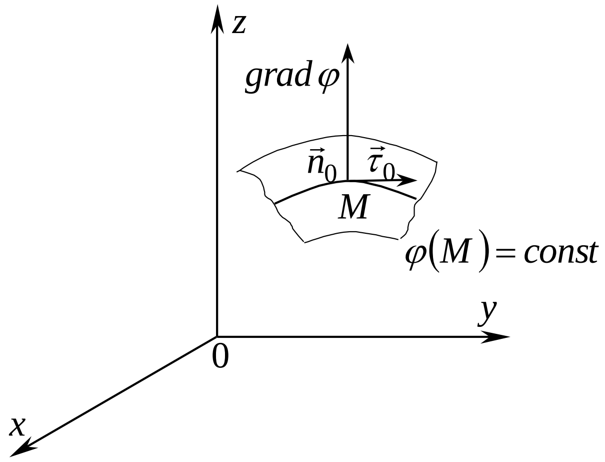


Рисунок 2.3.

Доказательство.

Возьмем в точке $M(x, y, z)$ какой-либо единичный вектор $\vec{l}_0$:

$$\vec{l}_0 = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma .$$

Найдем скалярное произведение векторов $grad\,\varphi$ и $\vec{l}_0$. (Напомним, что скалярное произведение двух векторов $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$ равняется сумме произведений одноименных проекций $\left(\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b\right)$.) Получим:

$$\left(grad\,\varphi\cdot\vec{l}_0\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma .$$

Правая часть полученного равенства согласно формуле (2.1) равна $\dfrac{\partial\varphi}{\partial l}$, значит:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \left(grad\,\varphi\cdot\vec{l}_0\right).$$

Скалярное произведение двух векторов равняется произведению длины одного из этих векторов на проекцию на него другого вектора и, учитывая, что длина вектора $\vec{l}_0$ равна единице, будем иметь:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \left(grad\,\varphi\cdot\vec{l}_0\right) = \left|\vec{l}_0\right|\cdot \text{ïð}_{\vec{l}_0}\, grad\,\varphi = \text{ïð}_{\vec{l}_0}\, grad\,\varphi , \qquad (2.5)$$

т.е. производная поля по какому-нибудь направлению равна проекции градиента на это направление.

Для того, чтобы выяснить, как направлен градиент скалярного поля в данной точке, проведем через точку $M(x, y, z)$ скалярного поля $\varphi(M)$ поверхность равного уровня $\varphi(M) = const$ (рисунок 2.3). Пусть $\vec{\tau}_0$ — произвольный единичный вектор, лежащий в касательной плоскости поверхности $\varphi(M) = const$. Так как поверхность $\varphi(M) = const$ эквипотенциальная, то приращение поля в точке M по направлению вектора $\vec{\tau}_0$ равно нулю: $\Delta\varphi = 0$, поэтому $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau}=\text{ïð}_{\vec{\tau}_0}grad\varphi=0$ и, следовательно, $grad\varphi\perp\vec{\tau}_0$. (В данном случае мы исключили из рассмотрения точки, в которых $grad\varphi=0$, то есть $\dfrac{\partial\varphi(M)}{\partial x}=\dfrac{\partial\varphi(M)}{\partial y}=\dfrac{\partial\varphi(M)}{\partial z}=0$. Такие точки называются особыми точками скалярного поля $\varphi(M)$ и требуют специального исследования.) Но так как вектор $\vec{\tau}_0$ – произвольный вектор, лежащий в касательной плоскости к поверхности $\varphi(M)=const$, то вектор $grad\varphi$ направлен перпендикулярно касательной плоскости к поверхности, то есть направлен по нормали $\vec{n}_0$ к эквипотенциальной поверхности в данной точке $M(x,y,z)$ или в противоположную сторону. Покажем, что имеет место первое утверждение. Приращение поля по направлению вектора $\vec{n}_0$ неотрицательно, поскольку он направлен в сторону возрастания поля, поэтому

$$\lim_{\Delta n\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta n_0}=\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}\geq 0.$$

Согласно формуле (2.5) будем иметь:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}=\text{ïð}_{\vec{n}_0}grad\varphi\geq 0,$$

откуда следует, что $grad\varphi$ направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания поля.

Наибольшая скорость изменения поля в каждой точке будет по направлению вектора $grad\varphi$ и численно равна длине градиента, то есть $|grad\varphi|$.

Действительно, согласно формуле (2.5), имеем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\text{ïð}_{\vec{l}_0}grad\varphi.$$

Но проекция вектора на другой вектор меньше или равна длине вектора и равна длине вектора тогда, когда направления векторов совпадают. Поэтому

$$|grad\varphi|\geq\frac{\partial\varphi}{\partial l}\ \text{и}\ |grad\varphi|=\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}=\max\frac{\partial\varphi}{\partial l}.$$

Пользуясь формулой длины вектора, получим:

$$\max\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial n_0}=|grad\varphi|=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}. \qquad (2.6)$$

Теорема доказана.

Инвариантность понятия градиента поля.

Определение градиента согласно формуле (2.4) было дано в некоторой декартовой системе координат. Но при изменении декартовой системы координат меняются как частные производные $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$, так и сами орты $\vec{i}$,

$\vec{j}$, $\vec{k}$, поэтому из данного определения не следует того, что градиент поля – понятие инвариантное. Из доказанной теоремы следует, что *и модуль, и направление градиента инвариантны*, так как связаны со скалярным полем $\varphi(M)$ вполне определенным образом, совершенно независимым выбора системы координат в пространстве. Тем самым доказана *инвариантность понятие градиента скалярного поля*. Доказанную выше теорему можно принять просто за определение градиента. Преимущество такого определения заключается в его инвариантности, так как оно не связано с упоминанием о какой-либо системе координат. Однако тогда бы формулу (2.4) надо было бы доказывать.

Свойства градиента поля.

Если $\varphi_1(M)$ и $\varphi_2(M)$ – два скалярных поля, имеющих градиенты, то справедливы формулы:

1) $grad(\varphi_1 + \varphi_2) = grad\varphi_1 + grad\varphi_2;$ (2.7)

2) $gradC\varphi = Cgrad\varphi \quad (C = const);$ (2.8)

3) $grad(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = \varphi_2 grad\varphi_1 + \varphi_1 grad\varphi_2;$ (2.9)

4) $grad\left(\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}\right) = \dfrac{\varphi_2 grad\varphi_1 - \varphi_1 grad\varphi_2}{\varphi_2^2};$ (2.10)

5) $gradF(\varphi) = \dfrac{dF}{d\varphi} grad\varphi,$ (2.11)

причем в правых частях формул (2.7), (2.9), (2.10) знак «+» или «–» обозначает сложение векторов и встречающиеся в правых частях формул (2.9), (2.10), (2.11) произведения суть произведения вектора на скаляр.

Все эти формулы доказываются на основании определения градиента (2.4) и известных правил дифференцирования функций. Докажем, например, формулы (2.7), (2.9), (2.11).

Формула (2.7) непосредственно вытекает из определения градиента (2.4), так как производная суммы равна сумме производных.

Формула (2.9) выводится так:

$$grad(\varphi_1\varphi_2) = \frac{\partial(\varphi_1\varphi_2)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(\varphi_1\varphi_2)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(\varphi_1\varphi_2)}{\partial z}\vec{k} =$$

$$= \left(\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)\vec{i} + \left(\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)\vec{j} + \left(\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \varphi_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)\vec{k} =$$

$$= \varphi_2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\vec{k}\right) + \varphi_1\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\vec{k}\right) =$$

$$= \varphi_2 grad\varphi_1 + \varphi_1 grad\varphi_2.$$

Выведем формулу (2.11). Согласно формуле (2.4) имеем:

$$gradF = \vec{i}\frac{\partial F}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial F}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial F}{\partial z}. \qquad (2.12)$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x};\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y};\ \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Подставляя эти значения в (2.12) и вынося общий множитель $\frac{\partial F}{\partial \varphi}$ за скобку, получим формулу (2.11).

Скалярное произведение вектора $grad\varphi$ на дифференциал радиус-вектора $d\vec{r}=\vec{i}\,dx+\vec{j}dy+\vec{k}dz$ равно дифференциалу $\varphi(M)$.

$$d\varphi = grad\varphi \cdot d\vec{r}\,. \tag{2.13}$$

Действительно, возьмем в поле φ произвольную точку $M(x,y,z)$ и проведем в нее радиус-вектор $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, тогда $d\vec{r}=\vec{i}\,dx+\vec{j}dy+\vec{k}dz$. Скалярное произведение векторов

$$grad\varphi=\vec{i}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial \varphi}{\partial z} \text{ и } d\vec{r}=\vec{i}\,dx+\vec{j}dy+\vec{k}dz$$

равно сумме произведений одноименных проекций:

$$\left(grad\varphi\cdot d\vec{r}\right)=\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial \varphi}{\partial z}dz=d\varphi,$$

что и требовалось доказать.

Формула (2.4) дает возможность по заданному скалярному полю $\varphi(x,y,z)$ находить его градиент.

Естественно возникает вопрос о решении обратной задачи: по заданному градиенту поля $grad\varphi$ определить поле $\varphi(M)$.

Пусть M_0M – любая линия, соединяющая точки M_0 и M на которой $\varphi(M)$ – дифференцируема (то есть на которой градиент поля определен). Интегрируя обе части равенства (2.13) по кривой M_0M, получим:

$$\varphi(M)-\varphi(M_0)=\int\limits_{M_0M} d\varphi=\int\limits_{M_0M} grad\varphi\cdot d\vec{r},$$

откуда

$$\varphi(M)=\varphi(M_0)+\int\limits_{M_0M} grad\varphi\cdot d\vec{r}\,. \tag{2.14}$$

Из формулы (2.14) видно, что вектор $grad\varphi$ достаточно полно характеризует само скалярное поле $\varphi(M)$.

Пример 2.2. Найдем градиент скалярного поля $\varphi(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$ в точке $M_0(1,2)$.

Вычислим частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ в точке $M_0(1,2)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2},\quad \frac{\partial \varphi(M_0)}{\partial x}=\frac{2\cdot 1}{1+1^2+2^2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2},\quad \frac{\partial \varphi(M_0)}{\partial y}=\frac{2\cdot 2}{1+1^2+2^2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Из формулы (2.4) следует, что градиент для случая плоского скалярного поля равен:

$$grad\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j}.$$

Лекция № 3. Поток векторного поля

Рассмотрим векторное поле, определенное функцией $\vec{a}(x, y, z)$, являющейся вектором скорости несжимаемой жидкости, движущейся стационарно, тогда векторные линии будут линиями тока жидкости. Возьмем некоторую поверхность S, находящуюся в жидкости, и подсчитаем количество жидкости, протекающей через эту поверхность за единицу времени. Для этого разобьем поверхность S на n элементарных площадок: ΔS_1, $\Delta S_2, \ldots$, ΔS_n. В каждой из этих площадок ΔS_i выберем произвольно точку и построим в ней единичный вектор нормали $\vec{n}_{i0}$. Если S – замкнутая поверхность, то $\vec{n}_{i0}$ будем брать по направлению внешней нормали, в противном случае возьмем произвольно одно из двух направлений нормали так, чтобы векторы $\vec{n}_{i0}$ во всех точках поверхности лежали по одну сторону поверхности. Будем считать площадку ΔS_i плоской, а вектор $\vec{a}$ – постоянным во всех точках элементарной площадки ΔS_i, равным $\vec{a}(M_i)$ (ввиду малости площадки с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости это допустимо).

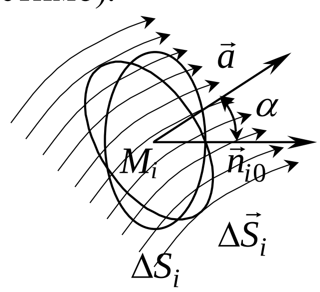


Рисунок 3.1.

В том случае, если площадка ΔS_i расположена перпендикулярно линиям тока (вектору $\vec{a}$), то количество жидкости, протекающей сквозь площадку за единицу времени, приближенно равно $|\vec{a}|\Delta S_i$. Если площадка ΔS_i расположена под некоторым углом α к линиям тока, где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n}_{i0}$: $\alpha = (\vec{a}, \vec{n}_{i0})$, очевидно, что сквозь нее будет протекать такое же количество жидкости, как сквозь проекции этой площадки на плоскость, перпендикулярную направлению тока жидкости, то есть вектору $\vec{a}$ (рисунок 3.1). Площадь проекции равна площади проектируемой фигуры, умноженной на косинус угла, образований нормалями к плоскостям проекции и проектируемой фигуры, поэтому количество жидкости $\Delta\Pi_i$, протекающей через площадку ΔS_i будет приближенно равно

$$\Delta\Pi_i \approx |\vec{a}|\Delta S_i \cos(\vec{a}, \vec{n}_{i0}) = a_n \Delta S_i, \tag{3.1}$$

где $(\vec{a}, \vec{n}_{i0})$ – угол между вектором $\vec{a}$ и нормалью $\vec{n}_{i0}$ к площадке ΔS_i, а a_n – проекция вектора $\vec{a}$ на эту же нормаль.

Площадку ΔS_i, можно представить в виде вектора $\Delta\vec{S}_i$ направленного по нормали к площадке, модуль которого равен численному значению площади ΔS_i, тогда

$$\Delta\vec{S}_i = \Delta S_i \vec{n}_{i0}.$$

$$|\vec{a}|\Delta S_i \cos(\vec{a}, \vec{n}_{i0}) = \vec{a}\Delta\vec{S}_i,$$

$$\Delta\Pi_i \approx \vec{a}\Delta\vec{S}_i. \tag{3.2}$$

Общее количество жидкости П, протекающей через поверхность S, равно сумме количеств жидкости, протекающей через все элементарные площадки ΔS_i, $i = 1,2,3,\ldots,n$. Поэтому будем иметь:

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(M_i)\Delta\vec{S}_i = \sum_{i=1}^{n} a_n(M_i)\Delta S_i. \tag{3.3}$$

Мы нашли приближенное выражение П, связанное со сделанными допущениями относительно $\Delta\vec{S}_i$ и $\vec{a}$.

Назовем диаметром элементарной площадки ΔS_i расстояние между двумя наиболее удаленными друг от друга точками площадки.

Чтобы найти точное значение количества жидкости П, протекающего через поверхность S в единицу времени, надо в выражении (3.3) перейти к пределу, когда диаметр каждой элементарной площадки $D(\Delta S_i)$ стремится к нулю, то есть когда каждая из площадок ΔS_i стягивается в точку.

Определение 3.1. *Потоком* Π *поля вектора* $\vec{a}(M)$ *через поверхность* S *называется предел интегральной суммы* $\sum_{i=1}^{n} \vec{a}(M_i)\Delta\vec{S}_i = \sum_{i=1}^{n} a_n(M_i)\Delta S_i$, *когда диаметр элементарной площадки стремится к нулю:*

$$\Pi = \lim_{D(\Delta S_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(M_i)\Delta\vec{S}_i = \lim_{D(\Delta S_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} a_n(M_i)\Delta S_i. \tag{3.4}$$

Определение 3.2. *Поверхностным интегралом вектора* $\vec{a}$ *по поверхности* S *называют поток вектора* $\vec{a}$ *через эту поверхность:*

$$\Pi = \lim_{D(\Delta S_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(M_i)\Delta\vec{S}_i = \iint_S \vec{a}\,d\vec{S} = \iint_S a_n\,dS. \tag{3.5}$$

где $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}_0$.

Физический смысл потока поля

Если $\vec{a}(M)$ есть скорость течения жидкости, то, как уже указано выше, поток поля через поверхность будет определять объем жидкости, протекающей через поверхность S в единицу времени. Этим и объясняется выбор названия «поток». Выясним, что выражает поток вектора в общем случае. В первой лекции мы говорили о том, что графически векторные поля изображаются векторными линиями. Но векторные линии дают возможность определять только направление вектора и точке векторного поля. Для того чтобы по векторным линиям можно было судить не только о направлении вектора, но и о модуле вектора $\vec{a}$, поступают обычно следующим образом: через площадку ΔS, перпендикулярную к вектору $\vec{a}$ в данной точке M, проводят векторные линии в количе-

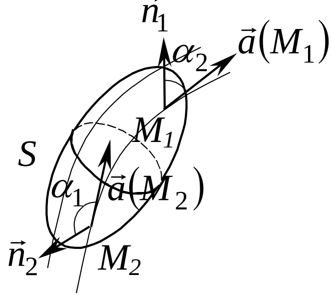


Рисунок 3.2.

стве, пропорциональном модулю вектора $\vec{a}$ в точке M и величине площадки ΔS:

$$N = k|\vec{a}|\Delta S,$$

где k — коэффициент пропорциональности. И в точках, где модуль вектора $\vec{a}$ больше, векторные линии проводят гуще, плотнее, чем в точках, где модуль вектора $\vec{a}$ меньше.

В скалярном произведении

$$\vec{a}(M_i)\Delta\vec{S}_i = a(M_i)\Delta S_i \cos(\vec{a}, \vec{n}_{i0})$$

множитель $\Delta S_i \cos(\vec{a}, \vec{n}_{i0})$ представляет проекцию площадки ΔS_i на направление, перпендикулярное вектору в точке M_i:

$$\Delta S_i \cos(\vec{a}, \vec{n}_{i0}) = (\Delta S_i)_n.$$

При графическом изображении поля через площадку $(\Delta S_i)_n$ проводится $N_i = k \cdot |\vec{a}(M_i)| \cdot (\Delta S_i)_n$ векторных линий. Поэтому

$$\vec{a}(M_i)\Delta\vec{S}_i = |\vec{a}(M_i)| \cdot (\Delta S_i)_n = \frac{N_i}{k},$$

$$\Pi = \lim_{D(\Delta S_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(M_i)\Delta\vec{S}_i = \lim_{D(\Delta S_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{k} = \frac{1}{k} \lim_{D(\Delta S_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} N_i = \frac{N}{k},$$

где N – число векторных линий, проходящих через поверхность S. Таким образом, в общем случае поток поля вектора $\vec{a}(M)$ через поверхность S пропорционален числу векторных линий, проходящих через поверхность S.

Заметим, что поток вектора есть скалярная величина. Установим физический смысл знака потока поля через замкнутую поверхность. Пусть вектор $\vec{a}(M)$ означает скорость течения жидкости. Поток вектора через замкнутую поверхность S равен:

$$\Pi = \oint\!\!\oint_S \vec{a}d\vec{S} = \oint\!\!\oint_S a_n dS = \lim_{D(\Delta S_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(M_i)\Delta\vec{S}_i. \tag{3.6}$$

Здесь за направление вектора берут направление внешней нормали. Изобразим на рисунке 3.2 объем V, ограниченный поверхностью S. В точках M_1 векторные линии выходят из объема V, внешняя нормаль образует с вектором $\vec{a}(M_1)$ острый угол и скалярное произведение $\vec{a}(M_1)\Delta\vec{S}_i > 0$, так как $\vec{a}(M_2)\Delta\vec{S}_i = |\vec{a}(M_1)| \cdot \Delta S_i \cdot \cos(\vec{a}, \Delta S_i)$, то есть в произведение входят только положительные величины. В точках M_2 векторные линии входят в объем V, внешняя нормаль образует с вектором $\vec{a}(M_2)$ тупой угол и скалярное произведение $\vec{a}(M_2)\Delta\vec{S}_i < 0$, так как $\vec{a}(M_2)\Delta\vec{S}_i = |\vec{a}(M_2)| \cdot \Delta S_i \cdot \cos(\vec{a}, \Delta S_i)$, то есть в произведение входят две положительные и одна отрицательная величина.

Получили, что в случае замкнутой поверхности сумма $\sum_{i=1}^{n} \vec{a}(M_i)\Delta\vec{S}_i$ состоит из положительных слагаемых, соответствующих площадкам ΔS_i, через которые жидкость вытекает из объема, и отрицательных слагаемых, соответствующих площадкам ΔS_i, через которые жидкость втекает в объем.

Предположим, что поток поля вектора $\vec{a}(M)$ через данную замкнутую поверхность S положителен:

$$\Pi = \lim_{D(\Delta S_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(M_i)\Delta\vec{S}_i > 0,$$

тогда начиная с некоторого разбиения S на ΔS_i, все суммы $\sum_{i=1}^{n} \vec{a}(M_i)\Delta\vec{S}_i$ остаются положительными. Это означает, что из объема V вытекает жидкости больше, чем в него втекает.

Когда жидкость несжимаема**,** то количество жидкости внутри объема V должно все время оставаться неизменным. При постоянстве количества жидкости внутри объема V это возможно тогда и только тогда, когда внутри объема V существуют *источники,* питающие поток.

Если же $\Pi < 0$, то и все суммы $\sum_{i=1}^{n} \vec{a}(M_i)\Delta\vec{S}_i$, начиная с некоторого разбиения, отрицательны, что означает, что в объем V втекает жидкости больше, чем из него вытекает; последнее возможно тогда и только тогда, когда внутри объема V имеются стоки, поглощающие излишек жидкости.

Таким образом, *поток вектора через замкнутую поверхность дает разность между количествами жидкости, вытекающей из объема V и втекающей в него в единицу времени.*

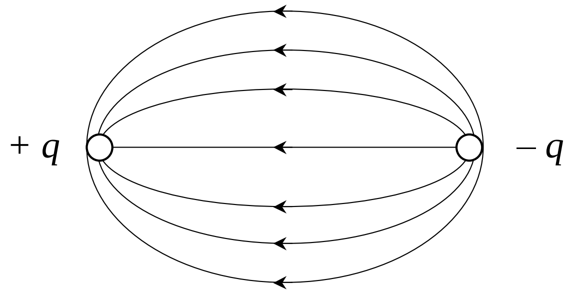


Рисунок 3.3.

Аналогично устанавливается понятие стока и источника произвольного векторного поля. Ранее было отмечено, что величина потока поля через некоторую поверхность S пропорциональна числу векторных линий, проходящих через поверхность S.

Поэтому в случае, если поверхность S замкнутая и поток через нее $\Pi > 0$, то из объема V, ограниченного поверхностью будет выходить векторных линий больше, чем в него входит. А это свидетельствует о том, что в объеме V порождаются векторные линии, то есть там имеются источники.

Если же $\Pi < 0$, то в объеме V исчезают векторные линии, то есть объеме V имеются стоки.

Так, например, в поле напряженности $\vec{E}$, порожденном двумя точечными зарядами $+q$ и $-q$, точка, в которой помещен заряд $+q$, будет источником поля, а точка, где помещен заряд $-q$, будет стоком поля (рисунок 3.3).

В магнитном поле источником будет северный полюс магнита, а стоком – южный полюс.

Если поток поля через некоторую замкнутую поверхность равен нулю, то это означает, что или внутри поверхности S нет ни источников, ни стоков, или внутри S имеются и источники, и стоки, но они компенсируют друг друга.

В соответствии с этим важно заметить, что внутри любой замкнутой поверхности S поля могут быть и источники, и стоки. Если при этом $\Pi > 0$, то источники преобладают над стоками, если же $\Pi < 0$, то стоки преобладают над источниками.

Пример 3.1. Вычислим поток поля напряженности $\vec{E} = \dfrac{q\vec{r}}{r^3}$ точечного заряда q через сферу радиуса R с центром в точке заряда.

Как видно из рисунка 3.4, нормаль во всех точках сферы направлена по радиус-вектору точки. Поэтому $\vec{n}_0 = \vec{r}_0$ и вектор $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}_0 = dS \cdot \vec{r}_0$.

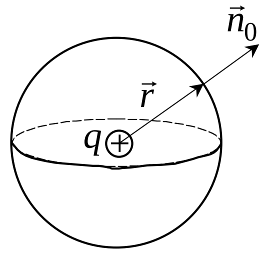


Рисунок 3.4.

Поток равен:

$$\Pi = \oiint_S \vec{E} d\vec{S} = \oiint_S \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} d\vec{S} = \oiint_S \frac{q}{r^2} \cdot \left(\vec{r}_0 \cdot d\vec{S} \cdot \vec{r}_0\right) = \oiint_S \frac{q}{r^2} dS .$$

Так как здесь интегрирование производится по сфере, на которой всюду $r = R$, то $\dfrac{q}{R^2}$ как постоянный множитель можно вынести за знак интеграла, а $\oiint_S dS = S = 4\pi R^2$ (как площадь поверхность сферы).

Поэтому получим:

$$\Pi = \oiint_S \frac{q}{r^2} dS = \oiint_S \frac{q}{R^2} dS = \frac{q}{R^2} \oiint_S dS = \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi q .$$

Лекция № 4. Дивергенция векторного поля

Установим численную характеристику плотности источника или стока поля в любой его точке. С этой целью зафиксируем в поле вектора $\vec{a}(x, y, z)$ произвольную точку и окружим некоторой замкнутой гладкой поверхностью (например, сферой с центром в точке M). Вычислим поток поля через S

$$\Pi = \oiint_S \vec{a} d\vec{S} .$$

Пусть V обозначает объем, ограниченный поверхностью S; тогда отношение

$$\frac{\Pi}{V} = \frac{\oiint_S \vec{a} d\vec{S}}{V}$$

определяет среднюю плотность источников (если $\Pi > 0$) стоков (если $\Pi < 0$), распределенных в объеме V.

Определение 4.1. *Предел отношения потока* Π *поля через некоторую замкнутую поверхность S к объему, ограниченному поверхностью, когда диаметр области стремится к нулю так, что при этом стягивается в точку M, называется дивергенцией, или расходимостью поля в точке M,* и обозначается символом $div\,\vec{a}$ (читают «дивергенция поля $\vec{a}$ в точке M»):

$$div\,\vec{a}(M) = \lim_{D(S)\to 0} \frac{\oiint\limits_S \vec{a}d\vec{S}}{V} \qquad (4.1)$$

(здесь $D(S)$ – диаметр поверхности S).

В этом определении предполагается, что предел существует независимо от того, как поверхность S стягивается к точке.

Дивергенция векторного поля есть скалярная величина. Она образует скалярное поле в данном векторном поле. Из физического смысла потока поля следует, что если $div\,\vec{a}(M) > 0$, то в точке M имеется источник плотности $div\,\vec{a}(M)$, если $div\,\vec{a}(M) < 0$, то в точке M имеется сток; если $div\,\vec{a}(M) = 0$, то в точке M нет ни источников, ни стоков.

Теорема 4.1. (О дивергенции поля). *Если проекции вектора* $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ *непрерывны вместе со своими частными производными* $\frac{\partial a_x}{\partial x}$, $\frac{\partial a_y}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial a_z}{\partial z}$, *то дивергенция поля существует и равна:*

$$div\,\vec{a}(M) = \frac{\partial a_x(M)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M)}{\partial z} \qquad (4.2)$$

Доказательство. Согласно определению

$$div\,\vec{a}(M) = \lim_{D(S)\to 0} \frac{\oiint\limits_S \vec{a}d\vec{S}}{V}.$$

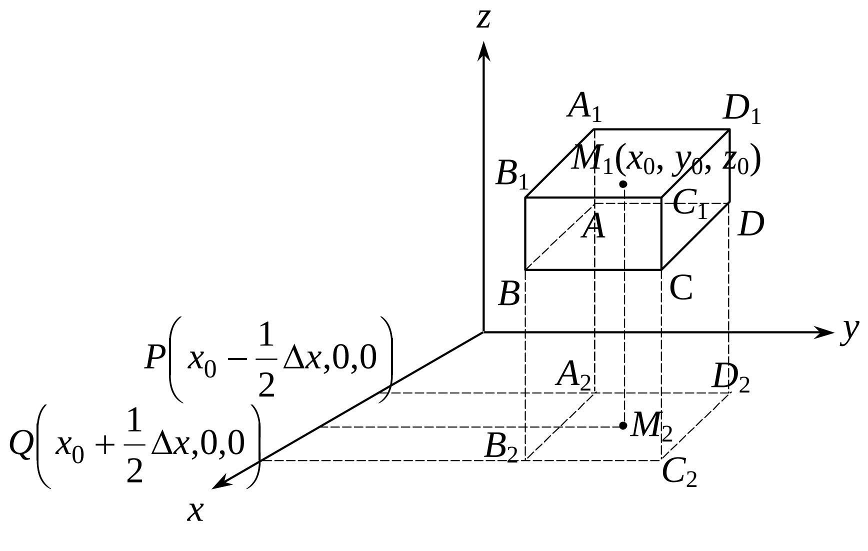


Рисунок 4.1.

Для вычисления написанного предела возьмем в качестве поверхности S поверхность параллелепипеда с центром в точке $M(x_0, y_0, z_0)$, ребра которого параллельны координатным осям x, y и z и равны соответственно Δx, Δy и Δz (рисунок 4.1). Поток вектора $\vec{a}$ через поверхность S состоит из шести интегралов, взятых по всем граням параллелепипеда:

$$\Pi = \oiint_S \vec{a}d\vec{S} = \oiint_S a_n dS = \iint_{ADD_1A_1} a_n dS + \iint_{BCC_1B_1} a_n dS +$$

$$+ \iint_{ABB_1A_1} a_n dS + \iint_{DCC_1D_1} a_n dS + \iint_{ABCD} a_n dS + \iint_{A_1B_1C_1D_1} a_n dS.$$

Рассмотрим интегралы, взятые по двум противоположным граням ADD_1A_1 и BCC_1B_1. На грани BCC_1B_1 направление внешней нормали совпадает с положительным направлением оси x, поэтому здесь $a_n = a_x$; на грани ADD_1A_1 внешняя нормаль направлена в отрицательную сторону оси x и здесь $a_n = -a_x$; кроме того, x на каждой из граней BCC_1B_1 и ADD_1A_1 сохраняет постоянное значение равное соответственно $x_0 + \frac{1}{2}\Delta x$, $x_0 - \frac{1}{2}\Delta x$. Чтобы получить эти грани, нужно менять величину y в пределах от $y_0 - \frac{1}{2}\Delta y$ до $y_0 + \frac{1}{2}\Delta y$ и z от $z_0 - \frac{1}{2}\Delta z$ до $z_0 + \frac{1}{2}\Delta z$. Поэтому интегралы по этим граням можно заменить двукратными интегралами соответственно от функции $a_x\left(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x, y, z\right)$ и $a_x\left(x_0 - \frac{1}{2}\Delta x, y, z\right)$ по переменным y и z в указанных выше одних и тех же пределах. Обозначим поток через противоположные грани ADD_1A_1 и BCC_1B_1, ABB_1A_1 и DCC_1D_1, $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно Π_1, Π_2 и Π_3. Тогда $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$.

Вычислим

$$\Pi_1 = \iint_{ADD_1A_1} a_n dS + \iint_{BCC_1B_1} a_n dS = \iint_{BCC_1B_1} a_x dS - \iint_{ADD_1A_1} a_x dS =$$

$$\iint_{BCC_1B_1} \left[a_x\left(x_0 + \frac{1}{2}\Delta x, y, z\right) - a_x\left(x_0 - \frac{1}{2}\Delta x, y, z\right)\right] dS.$$

К подынтегральной разности применим теорему Лагранжа о конечных приращениях по переменному x[1]. Теорему Лагранжа имеем право применять, так как согласно условию доказываемой теоремы условия теоремы Лагранжа выполняются. Получим:

$$\Pi_1 = \iint_{BCC_1B_1} \frac{\partial}{\partial x} a_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y, z)\Delta x dS\,,\ -\frac{1}{2} < \theta_1 < \frac{1}{2}.$$

Так как по условию доказываемой теоремы подынтегральная функция $\frac{\partial a_x}{\partial x}$ непрерывна, то можно применить теорему о среднем значении для

---

[1] ***Теорема Лагранжа (о конечном приращении).*** *Если функция* $y = f(x)$ *в замкнутом интервале* $[a,b]$ *непрерывна и имеет непрерывную производную в этом интервале, то существует по меньшей мере одно такое число* c *между* a *и* b*, что* $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ $(a < c < b)$.

двойного интеграла[2]. Применяя к полученному интегралу теорему о среднем, будем иметь:

$$\Pi_1 = \frac{\partial a_x(M_1)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z,$$

где M_1 – некоторая внутренняя точка параллелепипеда: $M_1(x_0+\theta_1\Delta x, y, z)$, а $\Delta y\Delta z$ – площадь грани BCC_1B_1. Аналогично вычисляются Π_2 и Π_3:

$$\Pi_2 = \frac{\partial a_y(M_2)}{\partial y}\Delta y\Delta x\Delta z,$$

$$\Pi_3 = \frac{\partial a_z(M_3)}{\partial z}\Delta z\Delta x\Delta y,$$

где M_2 и M_3 – некоторые внутренние точки параллелепипеда. Поток через всю поверхность параллелепипеда будет равен:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = \left[\frac{\partial a_x(M_1)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M_2)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M_3)}{\partial z}\right]\Delta x\Delta y\Delta z.$$

Объем прямоугольного параллелепипеда $V = \Delta x\Delta y\Delta z$. Поэтому

$$div\,\vec{a}(M) = \lim_{D(S)\to 0}\frac{\Pi}{V} =$$

$$= \lim_{D(S)\to 0}\frac{\left[\frac{\partial a_x(M_1)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M_2)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M_3)}{\partial z}\right]\Delta x\Delta y\Delta z}{\Delta x\Delta y\Delta z} =$$

$$= \frac{\partial a_x(M)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M)}{\partial z}.$$

В последнем равенстве мы сократили дробь на $\Delta x\Delta y\Delta z$ и, воспользовавшись тем, что при $D(S\to 0)$ точки M_1, M_2, M_3 неограниченно приближаются к точке M, а предел непрерывной функции равен значению функции в точке M согласно определению непрерывности функции в точке.

Теорема доказана.

* * *

Из доказанной формулы (4.2) и известных правил дифференцирования легко получить следующие свойства дивергенции:

$$div(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = div\,\vec{a}_1 + div\,\vec{a}_2, \quad (4.3)$$

$$div(\varphi\cdot\vec{a}) = \varphi\cdot div\,\vec{a} + \vec{a}\cdot grad\,\varphi, \quad (4.4)$$

$$div(f(r)\cdot\vec{r}) = 3f(r) + rf'(r). \quad (4.5)$$

Свойство (4.3) доказывается очень легко.

Докажем свойство (4.4).

Пусть $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, а $\varphi = \varphi(x,y,z)$ – скалярная функция, тогда

---

[2] ***Теорема о среднем значении.*** *Если* $y = f(x)$ *непрерывна в интервале* $[a,b]$, *то внутри интервала* $[a,b]$ *имеется по меньшей мере одно такое число* ξ, *что* $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$.

$$\varphi\cdot\vec{a}=\varphi\cdot a_x\vec{i}+\varphi\cdot a_y\vec{j}+\varphi\cdot a_z\vec{k}\,.$$

По формуле (4.2) имеем:

$$div(\varphi\cdot\vec{a})=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\cdot a_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\varphi\cdot a_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\varphi\cdot a_z)=$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial x}a_x+\frac{\partial a_x}{\partial x}\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial y}a_y+\frac{\partial a_y}{\partial y}\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial z}a_z+\frac{\partial a_z}{\partial z}\varphi=$$

$$=\frac{\partial a_x}{\partial x}\varphi+\frac{\partial a_y}{\partial y}\varphi+\frac{\partial a_z}{\partial z}\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial x}a_x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}a_y+\frac{\partial\varphi}{\partial z}a_z=$$

$$=\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)\varphi+\vec{a}\cdot grad\,\varphi=\varphi\cdot div\,\vec{a}+\vec{a}\cdot grad\,\varphi.$$

Формула (4.4) доказана.

Формула (4.5) получается из формулы (4.4) как частный случай, когда $\vec{a}=\vec{r}$ и $\varphi=f(r)$:

$$div\big(f(r)\cdot\vec{r}\big)=f(r)\cdot div\,\vec{r}+\vec{r}\cdot grad\ f(r). \qquad (4.6)$$

Вычислим теперь $div\,\vec{r}$ и $grad\ f(r)$:

$$div\,\vec{r}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=1+1+1=3;$$

$$grad\ f(r)=\frac{\partial f(r)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f(r)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f(r)}{\partial z}\vec{k}\,.$$

Дифференцируем как сложную функцию:

$$grad\ f(r)=\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{df(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}=$$

$$=\frac{df(r)}{dr}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k}\right)=$$

$$=\frac{df(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r}=\frac{df(r)}{dr}\vec{r}_0$$

(так как $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$).

Подставляя полученное в равенство (4.6), будем иметь:

$$div\big(f(r)\cdot\vec{r}\big)=3f(r)+\vec{r}\cdot\frac{df(r)}{dr}\cdot\vec{r}_0=3f(r)+r\cdot f'(r).$$

Пример 4.1. Найдем дивергенцию поля напряженности $E=\dfrac{q\vec{r}}{r^3}$ точечного заряда q ($\vec{r}$) – радиус-вектор, проведен из точки, где помещен заряд, в произвольную точку *M*).

При вычислении $div\,\vec{E}$ воспользуемся формулой (4.5):

$$div\,\vec{E}=3\cdot\frac{q}{r^3}+r\cdot\left(\frac{q}{r^3}\right)'=\frac{3q}{r^3}-\frac{3q}{r^3}=0.$$

Таким образом, в любой точке поля, где определен вектор $\vec{E}$ нет ни источников, ни стоков. В точке, где помещен заряд, это утверждение неверно. В этой точке $r = 0$, $\vec{E}$ не определено, формула (4.5) не применима.

Лекция № 5. Теорема Гаусса-Остроградского. Криволинейный интеграл от вектора, циркуляция вектора

5.1. Теорема Гаусса-Остроградского

Одной из важнейших теорем векторного анализа является теорема Гаусса-Остроградского. Она устанавливает связь между потоком и дивергенцией векторного поля.

Пусть во всех точках объема V и на его границе S поле $\vec{a}(x,y,z) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ определено и частные производные $\frac{\partial a_x}{\partial x}$, $\frac{\partial a_y}{\partial y}$, $\frac{\partial a_z}{\partial z}$ непрерывны. Тогда имеет место теорема.

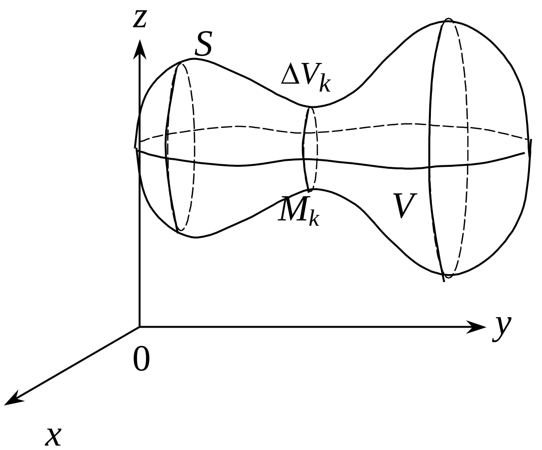


Рисунок 5.1.

Теорема 5.1. (Теорема Гаусса-Остроградского). *Поток векторного поля через замкнутую поверхность S равен тройному интегралу от дивергенции этого поля по объему V, ограниченному поверхностью S:*

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{a}\,d\vec{S} = \iiint_V div\,\vec{a}\,dV \tag{5.1}$$

или

$$\oint\!\!\!\oint_S a_n dS = \iiint_V div\,\vec{a}\,dV \tag{5.2}$$

Доказательство. Пусть S – замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, во всех точках которого определено поле вектора $\vec{a}(x,y,z)$ и частные производные $\frac{\partial a_x}{\partial x}$, $\frac{\partial a_y}{\partial y}$, $\frac{\partial a_z}{\partial z}$ непрерывны. Разобьем объем V на n элементарных объемов: $\Delta V_1, \Delta V_2, ..., \Delta V_k, ..., \Delta V_n$. Пусть S_k – замкнутая поверхность, ограничивающая объем ΔV_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$ (на рисунке 5.1 $n = 8$). В каждом объеме ΔV_k возьмем по точке M_k и определим в ней дивергенцию:

$$div\,\vec{a}(M_k) = \lim_{D(S_k)\to 0} \frac{\oint\!\!\oint_{S_k} \vec{a}\,d\vec{S}}{\Delta V_k} \quad \left(k = \overline{1,n}\right).$$

Этот предел согласно теореме о дивергенции поля (теорема 4.1) существует. По определению предела переменной известно, что абсолютная величина разности между пределом и значением переменной становится, начиная с некоторого значения переменной меньше любого положительного числа $\varepsilon > 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – любое положительное число, тогда $\dfrac{\varepsilon}{V} > 0$ также любое положительное число. Выберем $D(S_k)$ настолько малым, чтобы выполнялись неравенства:

$$\left| div\,\vec{a}(M_k) - \frac{\oiint\limits_{S_k} \vec{a}d\vec{S}}{\Delta V_k} \right| < \frac{\varepsilon}{V} \quad \left(k = \overline{1,n}\right).$$

Умножив на ΔV_k, получим:

$$\left| div\,\vec{a}(M_k)\Delta V_k - \oiint\limits_{S_k} \vec{a}d\vec{S} \right| < \frac{\varepsilon}{V}\Delta V_k \quad \left(k = \overline{1,n}\right).$$

Просуммировав эти n неравенств, получим неравенство:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} div\,\vec{a}(M_k)\Delta V_k - \sum_{k=1}^{n} \oiint\limits_{S_k} \vec{a}d\vec{S} \right| < \frac{\varepsilon}{V} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \tag{5.3}$$

(в правой части $\dfrac{\varepsilon}{V}$ как постоянный сомножитель вынесен за знак суммы).

Заметим, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta V_k = V$.

Далее, в сумме $\sum\limits_{k=1}^{n} \oiint\limits_{S_k} \vec{a}d\vec{S}$ все слагаемые, в которых интегралы берутся по поверхностям S_k, лежащим внутри объема V, взаимно уничтожаются и поэтому $\sum\limits_{k=1}^{n} \oiint\limits_{S_k} \vec{a}d\vec{S} = \oiint\limits_{S} \vec{a}d\vec{S}$.

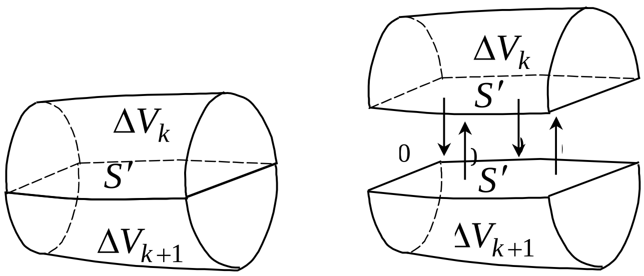


Рисунок 5.2.

Действительно, пусть S' – общая часть поверхностей объемов ΔV_k и ΔV_{k+1} (рисунок 5.2). Интеграл по поверхности S' войдет и в интеграл по S_k, и в интеграл по S_{k+1}, но направление внешних нормалей к S' на поверхностях S_k и S_{k+1} будут противоположны, как это видно из рисунка 5.2, поэтому интегралы по S' будут равны по величине, но противоположны по знаку, следовательно, при суммировании они уничтожатся. В итоге остается поток вектора $\vec{a}$ через всю поверхность S.

Подставив полученное в неравенство (5.3) и сократив в правой части на V, будем иметь:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} div\,\vec{a}(M_k)\Delta V_k - \oiint_S \vec{a}d\vec{S}\right| < \varepsilon .$$

Из последнего неравенства видно, что разность между переменной величиной $\sum_{k=1}^{n} div\,\vec{a}(M_k)\Delta V_k$ и постоянной величиной $\oiint_S \vec{a}d\vec{S}$ по абсолютной величине становится меньше любого наперед заданного положительного числа ε. Поэтому, по определению предела переменной

$$\lim_{D(\Delta V_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} div\,\vec{a}(M_k)\Delta V_k = \oiint_S \vec{a}d\vec{S} .$$

Но предел интегральной суммы является, по определению, тройным интегралом от дивергенции вектора $\vec{a}$ по объему V:

$$\lim_{D(\Delta V_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} div\,\vec{a}(M_k)\Delta V_k = \iiint_V div\,\vec{a}\,dV .$$

Поэтому

$\iiint_V div\,\vec{a}\,dV = \oiint_S a_n dS$, то есть теорема доказана.

В ряде случаев бывает удобным записывать теорему Гаусса-Остроградского в координатной форме. Заменив дивергенцию $div\,\vec{a}$ ее выражением по формуле (4.2), преобразуем равенство (5.1) к виду:

$$\oiint_S \vec{a}d\vec{S} = \iiint_V \left(\frac{\partial a_x(M)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M)}{\partial z} \right) dxdydz . \tag{5.4}$$

Теорема Гаусса-Остроградского широко применяется к решению задач.

Пример 5.1. Вычислим поток поля напряженности $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}$ точечного заряда q, помещенного в начале координат, через замкнутую поверхность S, не содержащую начала координат с помощью теоремы Гаусса-Остроградского.

В примере 4.1 было найдено, что во точках, где $r \neq 0$, $div\,\vec{E} = 0$. Поэтому по теореме Гаусса-Остроградского имеем:

$$\Pi = \oiint_S \vec{a}d\vec{S} = \iiint_V div\,E\,dV = 0 .$$

В заключение применим теорему Гаусса-Остроградского к исследованию движения жидкости. Пусть в некотором объеме V течет жидкость плотности ρ и $u = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ – скорость течения, зависящая от координат x, y, z и от времени t.

Возьмем в потоке жидкости произвольную замкнутую поверхность S. Поток вектора $\rho \cdot \vec{u}$ через эту поверхность будет, очевидно, давать массу жидкости, вытекающей из объема, ограниченного поверхностью S, за единицу времени. По теореме Гаусса-Остроградского имеем:

$$\oiint_S \rho \cdot \vec{u}\, d\vec{S} = \iiint_V div\, \rho \cdot \vec{u}\, dV .$$

Ту же самую массу жидкости можно подсчитать и по-другому.

Величина $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ определяет скорость уменьшения массы, а $\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$ – уменьшение массы в объеме dV за единицу времени. Тогда во всем объеме V масса уменьшится на величину $\iiint_V \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV$. Поэтому

$$\oiint_S \rho \cdot \vec{u}\, d\vec{S} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

или

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \cdot \vec{u}\right) \right) dV = 0 ,$$

так как это условие выполняется для произвольного объема *V*, то подынтегральная функция должна равняться нулю:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\left(\rho \cdot \vec{u}\right) = 0 . \qquad (5.5)$$

Уравнение (5.5) является одним из основных уравнений гидродинамики, оно называется обычно *уравнением неразрывности.*

Запишем его в другой форме: так как ρ — скалярная функция, то согласно формуле (4.4) имеем:

$$div\left(\rho \cdot \vec{u}\right) = \left(\vec{u} \cdot grad\ \rho\right) + \rho \cdot div\, \vec{u} = u_x \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} +$$

$$+ \rho \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right).$$

Если *x*, *y*, *z* — координаты движущейся точки, то

$$\frac{dx}{dt} = u_x ;\ \frac{dy}{dt} = u_y ;\ \frac{dz}{dt} = u_z ,$$

поэтому

$$div\left(\rho \cdot \vec{u}\right) = \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \rho \cdot div\, \vec{u}$$

и уравнение неразрывности принимает вид:

Но первые четыре слагаемых дают полную производную функции ρ по t: $\frac{\partial \rho}{\partial t}$. Поэтому окончательно:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot div\, \vec{u} = 0 .$$

5.2. Криволинейный интеграл от вектора. Циркуляция вектора

Пусть имеем векторное поле, образованное вектором $\vec{a}(M) = \vec{a}(x, y, z)$.

Рассмотрим некоторую произвольную кривую L в векторном поле (рисунок 5.3). Разобьем кривую L точками M_1, M_2, $M_3, \ldots$, M_k, $M_{k+1}, \ldots$, M_n на частичные дуги. Пусть уравнение линии L задано в векторной форме:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\ .$$

На каждой из этих частичных дуг построим вектор приращения радиус-вектора:

$$\Delta\vec{r}_k = \vec{r}(M_{k+1}) - \vec{r}(M_k)$$

и вычислим сумму скалярных произведений векторов $\vec{a}(M_k)$ и $\Delta\vec{r}_k$:

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{a}(M_k)\Delta\vec{r}_k\ ,$$

где n означает число разбиений. Мы получим интегральную сумму. Предел полученной интегральной суммы при стремлении всех Δr_k к нулю называется *криволинейным интегралом* от вектора $\vec{a}$ по кривой L и обозначается $\int\limits_L \vec{a}d\vec{r}$:

$$\int\limits_L \vec{a}d\vec{r} = \lim_{\Delta r_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \vec{a}(M_k)\Delta\vec{r}_k\ . \qquad (5.6)$$

Этот интеграл называют также *линейным интегралом вектора* $\vec{a}$ *по кривой* L.

Определение 5.1. *Если кривая L замкнутая, то криволинейный интеграл* $\oint\limits_L \vec{a}d\vec{r}$ *, называется циркуляцией вектора* $\vec{a}$ *по кривой L или по контуру L и обозначается:*

$$\Gamma = \oint\limits_L \vec{a}d\vec{r} = \lim_{\Delta r_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \vec{a}(M_k)\Delta\vec{r}_k\ . \qquad (5.7)$$

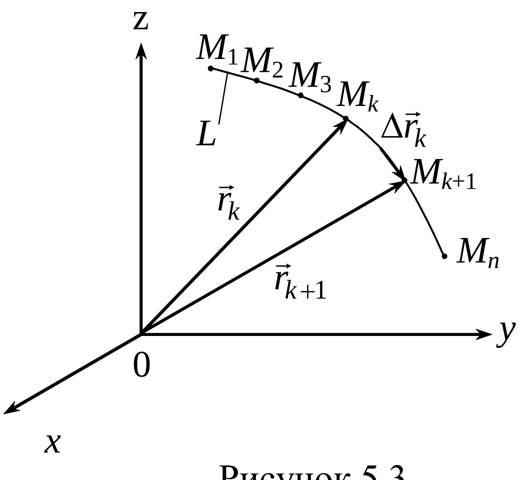


Рисунок 5.3.

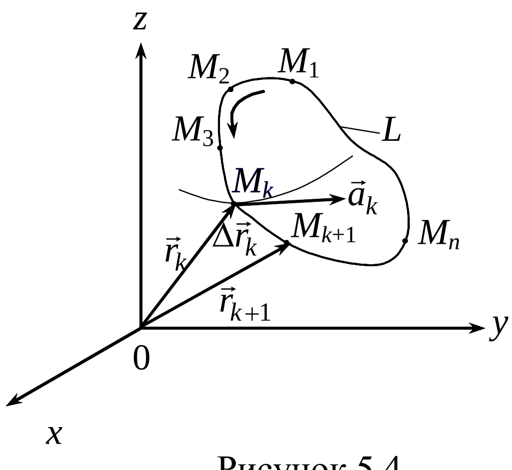


Рисунок 5.4.

При этом за положительное направление обхода кривой при принятой на**ми** правой системе координат принимается направление против часовой стрелки (рисунок 5.4). Формула (5.7) выражает циркуляцию поля в векторном виде. Получим выражение циркуляции Γ вектора $\vec{a}$ в координатной форме. Имеем:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k};$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k};$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}.$$

Следовательно,

$$\vec{a}\,d\vec{r} = a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Циркуляция Γ (5.7) принимает вид:

$$\Gamma = \oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Физический смысл циркуляции поля.

Если вектор выражает силу, то $\vec{a}_k \Delta\vec{r}_k = \Delta A_k$ – элементарная работа, а

$$A = \oint_L \vec{a}d\vec{r} = \lim_{\Delta r_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \vec{a}(M_k)\Delta\vec{r}_k$$ – полная работа.

Поэтому *физический смысл циркуляции – это работа поля на замкнутом контуре*.

Циркуляции поля можно дать и другое физическое толкование.

Пусть вектор $\vec{a}$ физически изображает погонную силу, то есть силу, отнесенную к единице длины. Тогда произведение $|\vec{a}(M_k)| \cdot |\Delta\vec{r}_k|$ будет изображать примерно величину силы в точке M_k. Умножив её на $\cos(\vec{a}_k, \Delta\vec{r}_k)$, мы получим проекцию этой силы на направление $\Delta\vec{r}_k$.

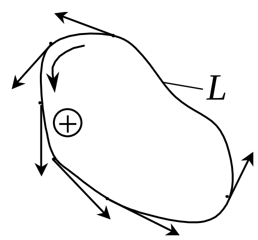


Рисунок 5.5.

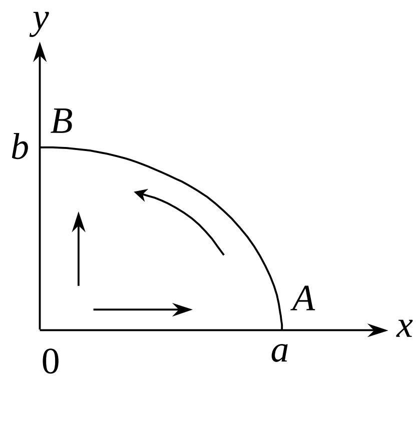
Таким образом, каждое слагаемое

$$\vec{a}(M_k)\Delta\vec{r}_k = |\vec{a}(M_k)| \cdot |\Delta\vec{r}_k| \cdot \cos(\vec{a}_k, \Delta\vec{r}_k)$$

представляет проекцию силы на направление $\Delta\vec{r}_k$. В пределе вектор $\Delta\vec{r}_k$ в каждой точке M_k направлен по касательной к контуру L. Поэтому циркуляция поля

$$\Gamma = \oint_L \vec{a}d\vec{r} = \lim_{\Delta r_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \vec{a}(M_k)\Delta\vec{r}_k$$

в нашем случае представляет алгебраическую сумму сил, действующих на контур по направлению касательных к контуру (рисунок 5.5). При этом положительные слагаемые $|\vec{a}(M_k)| \cdot |\Delta\vec{r}_k| \cdot \cos(\vec{a}_k, \Delta\vec{r}_k)$ (когда $(\vec{a}_k, \Delta\vec{r}_k)$ – острый угол) вращают контур L в положительном направлении, а отрицательные слагаемые (когда $(\vec{a}_k, \Delta\vec{r}_k)$ – тупой угол) вращают контур в отрицательном направлении.



Если $\Gamma > 0$, то контур L будет вращать-

Рисунок 5.6.

ся в положительном направлении. Если $\Gamma < 0$, то контур будет вращаться в отрицательном направлении.

Если $\Gamma = 0$ (что может быть, когда поле во всех точках перпендикулярно к L или сумма отрицательных и положительных слагаемых одинакова), то контур L вращаться не будет.

Таким образом, *циркуляция поля по данному контуру характеризует вращательную способность поля на данном контуре*.

Важно заметить, что *циркуляция данного поля зависит не только от формы контура, но и от его ориентации в поле*.

Пример 5.2. Найдем циркуляцию вектора $\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j}$ по контуру, состоящему из осей координат и первой четверти эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ (рисунок 5.6).

Контур L состоит из отрезков осей: BO и OA и дуги AB эллипса. Обход по L будем совершать против часовой стрелки. Поэтому циркуляция Γ будет равна:

$$\Gamma = \oint_L \vec{a}d\vec{r} = \int_{BO} \vec{a}d\vec{r} + \int_{OA} \vec{a}d\vec{r} + \int_{AB} \vec{a}d\vec{r}\,. \tag{5.8}$$

Вычислим каждый из линейных интегралов правой части. На отрезке BO оси y имеем $x = 0$, поэтому вектор $\vec{a}$ примет вид $\vec{a} = 0\vec{i} + y\vec{j} = y\vec{j}$, на оси y $\vec{r} = y\vec{j}$, $d\vec{r} = dy\,\vec{j}$, $\vec{a}\,d\vec{r} = ydy$ и

$$\int_{BO} \vec{a}d\vec{r} = \int_b^0 ydy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_b^0 = -\frac{b^2}{2}.$$

На отрезке OA оси x имеем $y = 0$, поэтому там вектор $\vec{a}$ равен $\vec{a} = 2x\vec{i} + 0\vec{j} = 2x\vec{i}$; радиус-вектор на оси x: $\vec{r} = x\vec{i}$, $d\vec{r} = dx\,\vec{i}$; $\vec{a}\,d\vec{r} = 2xdx$;

$$\int_{OA} \vec{a}d\vec{r} = \int_0^a 2xdx = x^2\Big|_0^a = a^2.$$

На дуге AB эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ вектор

$\vec{a} = 2x\vec{i} + y\vec{j} = 2a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}$.

Радиус-вектор $\vec{r}$ на эллипсе

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = a\cos t\,\vec{i} + b\sin t\,\vec{j}$; $d\vec{r} = -a\sin t\,dt\,\vec{i} + b\cos t\,dt\,\vec{j}$;

$$\vec{a}d\vec{r} = -2a^2\cos t\sin t\,dt + b^2\sin t\cos t\,dt = \left(b^2 - 2a^2\right)\sin t\cos t\,dt =$$

$$= \frac{b^2 - 2a^2}{2}\sin 2t\,dt.$$

При движении по дуге AB в направлении от A к B параметр t изменяется в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\int_{AB} \vec{a}d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b^2 - 2a^2}{2}\sin 2t\,dt = -\frac{b^2 - 2a^2}{2}\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{b^2 - 2a^2}{2}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{b^2 - 2a^2}{2}.$$

Подставляя значения линейных интегралов в равенство (5.8), получим:

$$\Gamma = -\frac{b^2}{2} + a^2 + \frac{b^2 - 2a^2}{2} = 0.$$

Лекция № 6. Вихрь (ротор) поля. Свойства вихря. Физический смысл вихря. Теорема Стокса

6.1. Вихрь (ротор) поля. Свойства вихря. Физический смысл вихря.

Пусть векторное поле образовано вектором $\vec{a}(M)$ и пусть M – любая точка поля (рисунок 6.1). Проведем через нее некоторую плоскость P и одно из направлений нормали $\vec{n}$ к плоскости примем за положительное. Окружим точку M некоторым замкнутым контуром L, лежащим в плоскости P, установим на нем положительное направление в соответствии с выбранным направлением нормали $\vec{n}$; вычислим циркуляцию поля по контуру L:

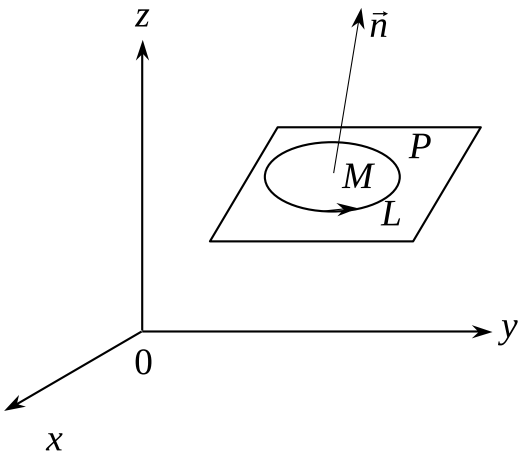


Рисунок 6.1.

$$\Gamma = \oint_L \vec{a}(M)d\vec{r}.$$

Разделим циркуляцию на величину площади площадки, ограниченной контуром L:

$$\frac{\oint_L \vec{a}(M)d\vec{r}}{S}.$$

Определение 6.1. *Вихрем, или ротором, поля в точке M называется вектор, проекция которого на нормаль к площадке равна пределу отношения циркуляции векторного поля по контуру L, окружающему точку M, к площади S площадки, ограниченной контуром L, когда контур L стягивается к точке M:*

$$rot_{\vec{n}}\vec{a} = \lim_{D(S)\to 0} \frac{\oint_L \vec{a}(M)d\vec{r}}{S} \qquad (6.1)$$

(rot означает сокращение латинского слова rotor — «вихрь» «вращатель» и читается «ротор а»).

Формула (6.1) малопригодна для вычисления ротора. Докажем основную теорему о роторе, дающую возможность вычислять ротор.

Теорема 6.1. (О роторе поля). *Если проекции вектора* $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ *непрерывны вместе со своими частными производными*

$\frac{\partial a_x}{\partial x}$, $\frac{\partial a_y}{\partial y}$, $\frac{\partial a_z}{\partial z}$, *то справедлива следующая формула:*

$$rot\,\vec{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cdot\vec{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cdot\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cdot\vec{k} \qquad (6.2)$$

Доказательство. Возьмем в поле $\vec{a}(M)$ произвольную точку $M(x_0, y_0, z_0)$ и найдем в ней проекции вектора $rot\,\vec{a}$ на оси координат, то есть на направление векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Найдем, например, проекцию $rot\,\vec{a}$ на направление вектора $\vec{k}$. Согласно определению, имеем:

$$rot_{\vec{k}}\vec{a}=\lim_{D(S)\to 0}\frac{\oint\limits_L \vec{a}(M)d\vec{r}}{S}.$$

где L — контур, лежащий в плоскости P, перпендикулярной вектору $\vec{k}$. Возьмем, например, в качестве L контур элементарного прямоугольника $ABCD$ с длинами сторон $AB=\Delta x$, $BC=\Delta y$ (рисунок 6.2) с центром в точке M. Вычислим циркуляцию поля по контуру $ABCD$:

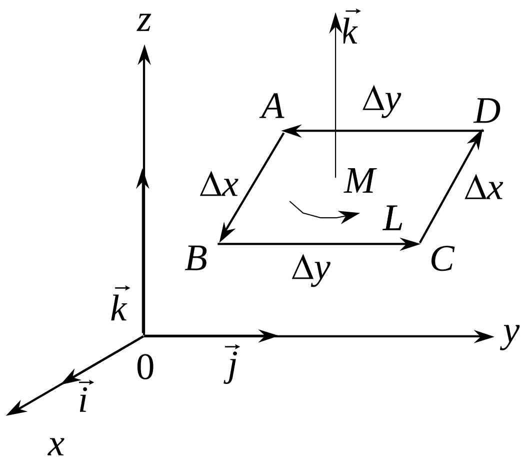


Рисунок 6.2.

$$\Gamma=\oint\limits_{ABCD}\vec{a}d\vec{r}=\int\limits_{AB}\vec{a}d\vec{r}+\int\limits_{BC}\vec{a}d\vec{r}+\int\limits_{CD}\vec{a}d\vec{r}+\int\limits_{DA}\vec{a}d\vec{r}=$$
$$\int\limits_{AB}\vec{a}d\vec{r}-\int\limits_{DC}\vec{a}d\vec{r}+\int\limits_{BC}\vec{a}d\vec{r}-\int\limits_{AD}\vec{a}d\vec{r}. \qquad (6.3)$$

На сторонах AB и DC $d\vec{r}=\vec{i}\,dx$; на AB $z=z_0$, $y=y_0-\frac{1}{2}\Delta y$, x изменяется от $x_0-\frac{1}{2}\Delta x$ до $x_0+\frac{1}{2}\Delta x$; на DC $z=z_0$, $y=y_0+\frac{1}{2}\Delta y$, а x изменяется в тех же пределах, что и на AB. Поэтому

$$\int\limits_{AB}\vec{a}d\vec{r}-\int\limits_{DC}\vec{a}d\vec{r}=\int\limits_{AB}a_x\left(x,y_0-\frac{1}{2}\Delta y,z_0\right)dx-\int\limits_{DC}a_x\left(x,y_0+\frac{1}{2}\Delta y,z_0\right)dx=$$
$$=-\int\limits_{x_0-\frac{1}{2}\Delta x}^{x_0+\frac{1}{2}\Delta x}\left(a_x\left(x,y_0+\frac{1}{2}\Delta y,z_0\right)-a_x\left(x,y_0-\frac{1}{2}\Delta y,z_0\right)\right)dx.$$

К подынтегральной разности применим теорему Лагранжа по переменной y[3]:

[3] ***Теорема Лагранжа (о конечном приращении).*** *Если функция* $y=f(x)$ *в замкнутом интервале* $[a,b]$ *непрерывна и имеет непрерывную производную в этом интервале, то существует по меньшей мере одно такое число* c *между* a *и* b, *что* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ $(a<c<b)$.

$$\int\limits_{AB} \vec{a}d\vec{r} - \int\limits_{DC} \vec{a}d\vec{r} = -\int\limits_{x_0-\frac{1}{2}\Delta x}^{x_0+\frac{1}{2}\Delta x} \frac{\partial a_x}{\partial y}\left(x, y_0+\theta_1\Delta y, z_0\right)\cdot \Delta y \cdot dx,\ \left|\Theta_1\right| < \frac{1}{2}.$$

По теореме о среднем значении определенного интеграла[4] получим:

$$\int\limits_{AB} \vec{a}d\vec{r} - \int\limits_{DC} \vec{a}d\vec{r} = -\frac{\partial a_x\left(M_1\right)}{\partial y}\Delta y \Delta x,$$

где M_1 – некоторая внутренняя точка прямоугольника *ABCD*.

Аналогично вычисляется и вторая разность:

$$\int\limits_{BC} \vec{a}d\vec{r} - \int\limits_{AD} \vec{a}d\vec{r} = \int\limits_{BC} a_y\left(x_0+\frac{1}{2}\Delta x, y, z_0\right)dy - \int\limits_{AD} a_y\left(x_0-\frac{1}{2}\Delta x, y, z_0\right)dy =$$

$$= \int\limits_{y_0-\frac{1}{2}\Delta y}^{y_0+\frac{1}{2}\Delta y} \left(a_y\left(x_0+\frac{1}{2}\Delta x, y, z_0\right) - a_y\left(x_0-\frac{1}{2}\Delta x, y, z_0\right)\right)dy =$$

$$= \int\limits_{y_0-\frac{1}{2}\Delta y}^{y_0+\frac{1}{2}\Delta y} \frac{\partial a_y}{\partial x}\left(x_0+\theta_1\Delta x, y, z_0\right)\cdot \Delta x \cdot dy = \frac{\partial a_y\left(M_2\right)}{\partial x}\Delta x \Delta y,$$

где M_2 – некоторая другая внутренняя точка прямоугольника $ABCD$.

Подставляя полученное в равенство (6.3), будем иметь:

$$\Gamma = \oint\limits_{ABCD} \vec{a}\left(M\right)d\vec{r} = \left[\frac{\partial a_y\left(M_2\right)}{\partial x} - \frac{\partial a_x\left(M_1\right)}{\partial y}\right]\Delta x \Delta y.$$

Площадь $S_{ABCD} = \Delta x \Delta y$ как площадь прямоугольника. Поэтому,

$$rot_{\vec{k}}\vec{a} = \lim_{D(S)\to 0} \frac{\oint\limits_{ABCD} \vec{a}\left(M\right)d\vec{r}}{S} = \lim_{D(S)\to 0} \frac{\left[\frac{\partial a_y\left(M_2\right)}{\partial x} - \frac{\partial a_x\left(M_1\right)}{\partial y}\right]\Delta x \Delta y}{S} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left[\frac{\partial a_y\left(M_2\right)}{\partial x} - \frac{\partial a_x\left(M_1\right)}{\partial y}\right].$$

Но так как согласно условию теоремы частные производные $\frac{\partial a_x}{\partial x}$, $\frac{\partial a_y}{\partial y}$, $\frac{\partial a_z}{\partial z}$ непрерывны, то

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial a_y\left(M_2\right)}{\partial x} = \frac{\partial a_y\left(M\right)}{\partial x},\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial a_x\left(M_1\right)}{\partial y} = \frac{\partial a_x\left(M\right)}{\partial y},$$

---

[4] **Теорема о среднем значении.** Если $y = f(x)$ непрерывна в интервале $[a,b]$, то внутри интервала $[a,b]$ имеется по меньшей мере одно такое число ξ, что $\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$.

поэтому

$$rot_{\vec{k}}\vec{a} = \frac{\partial a_y(M)}{\partial x} - \frac{\partial a_x(M)}{\partial y}.$$

Аналогично находятся проекции вектора $rot\,\vec{a}$ на направления векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$:

$$rot_{\vec{i}}\vec{a} = \frac{\partial a_z(M)}{\partial y} - \frac{\partial a_y(M)}{\partial z},$$

$$rot_{\vec{j}}\vec{a} = \frac{\partial a_x(M)}{\partial z} - \frac{\partial a_z(M)}{\partial x}.$$

Чтобы легче было запомнить, эту формулу записывают в виде символического определителя:

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \tag{6.4}$$

где предполагается, что при раскрытии определителя (например, по элементам первой строки) операции умножения элементов второй строки на элементы третьей строки заменяются операциями дифференцирования (например, $\frac{\partial}{\partial x} a_y = \frac{\partial a_y}{\partial x}, \ldots$).

Свойства вихря вектора

1. $rot(C_1\vec{a}_1 + C_2\vec{a}_2) = C_1 rot\,\vec{a}_1 + C_2 rot\,\vec{a}_2$ (6.5)

где C_1 и C_2 — постоянные числа.

Равенство (6.5) непосредственно доказывается применением формулы (6.2) к вектору $C_1\vec{a}_1 + C_2\vec{a}_2$.

2. Вихрь постоянного вектора $\vec{C}$ равен нулю:

$$rot\,\vec{C} = 0 \tag{6.6}$$

Равенство также следует из формулы (6.5)

3. $rot(u\vec{a}) = u\,rot\,\vec{a} + [grad\,u \cdot \vec{a}]$, (6.7)

где $u = u(x, y, z)$ – скалярная функция.

Действительно, запишем проекцию вихря вектора $\vec{a}$ на ось x:

$$rot_{\vec{i}}(u\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial y}(ua_z) - \frac{\partial}{\partial z}(ua_y) = u\frac{\partial a_z}{\partial y} + a_z\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial a_y}{\partial z} - a_y\frac{\partial u}{\partial z} =$$

$$= u\frac{\partial a_z}{\partial y} - u\frac{\partial a_y}{\partial z} + a_z\frac{\partial u}{\partial y} - a_y\frac{\partial u}{\partial z} = u\,rot_{\vec{i}}\vec{a} + [grad\,u \cdot \vec{a}]_{\vec{i}},$$

так как $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ – проекции $grad\,u$ на оси y и z. Аналогично:

$$rot_{\vec{j}}(u\vec{a}) = u\,rot_{\vec{j}}\vec{a} + [grad\,u \cdot \vec{a}]_{\vec{j}},$$

$$rot_{\vec{k}}(u\vec{a}) = u\, rot_{\vec{k}}\vec{a} + [grad\, u \cdot \vec{a}]_{\vec{k}} .$$

Следовательно, у векторов, стоящих в левой и правой частях равенства (6.7), проекции на все оси координат соответственно равны, а поэтому и векторы равны.

Физический смысл ротора.

В предыдущем пункте было показано, что циркуляция поля вектора $\vec{a}$ по данному контуру $\Gamma = \oint\limits_L \vec{a}d\vec{r}$ характеризует вращательную способность поля на данном контуре *L*.

Отношение $\dfrac{\Gamma}{S} = \dfrac{\oint\limits_L \vec{a}d\vec{r}}{S}$ характеризует вращательную способность поля на контуре, отнесенную к единице площади. Согласно определению вихря имеем:

$$rot_{\vec{n}}\vec{a}(M) = \lim_{D(S)\to 0} \frac{\oint\limits_L \vec{a}d\vec{r}}{S} .$$

Предел, стоящий в правой части, характеризует вращательную способность поля в точке *M* в направлении плоскости *P* (рисунок 6.1). Пусть теперь нормаль $\vec{n}$ к плоскости *P,* в которой расположен контур *L,* параллельна вектору $rot\,\vec{a}$: $\vec{n} \,||\, rot\,\vec{a}$. Тогда

$$\lim_{D(S)\to 0} \frac{\oint\limits_L \vec{a}d\vec{r}}{S} = rot_{\vec{n}}\vec{a} = |rot\,\vec{a}|.$$

Для других направлений $\vec{n}$, не параллельных вектору $rot\,\vec{a}$, величина

$$\lim_{D(S)\to 0} \frac{\oint\limits_L \vec{a}d\vec{r}}{S} = rot_{\vec{n}}\vec{a} = |rot\,\vec{a}| \cdot \cos(\vec{n}, rot\,\vec{a}) < |rot\,\vec{a}|.$$

Следовательно, *вектор* $\mathrm{rot}\,\vec{a}$ *направлен по нормали к плоскости, в которой вращательная способность поля наибольшая; численное значение (модуль) вектора* $\mathrm{rot}\,\vec{a}$ *характеризует вращательную способность поля в точке M плоскости P, перпендикулярной вектору* $\mathrm{rot}\,\vec{a}$ – в этом физический смысл вихря поля.

Пример 6.1. Найдем вихрь поля линейных скоростей $\vec{v}$ точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$, $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$, где $\vec{r}$ радиус-вектор точки.

Вектор $\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ в координатной форме, учитывая, что

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k} ,\ \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} ,$$

запишется так:

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(z\omega_y - y\omega_z\right) + \vec{j}\left(x\omega_z - z\omega_x\right) + \vec{k}\left(y\omega_x - x\omega_y\right).$$

Согласно формуле (6.4) $rot\,\vec{v}$ равен:

$$rot\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z\omega_y - y\omega_z & x\omega_z - z\omega_x & y\omega_x - x\omega_y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left(\omega_x + \omega_x\right) + \vec{j}\left(\omega_y + \omega_y\right) + \vec{k}\left(\omega_z + \omega_z\right) = 2\vec{\omega}.$$

При вычислении определителя мы предполагали, что $\omega = const$, а поэтому все частные производные от проекции этого вектора на все оси равны нулю.

Таким образом, $rot\,\vec{v} = 2\omega$, что вполне согласуется с указанным выше физическим смыслом вектора $rot\,\vec{a}$.

6.2. Теорема Стокса

Теорема Стокса так же, как и теорема Гаусса-Остроградского, принадлежит к основным теоремам векторного анализа. Она устанавливает связь между циркуляцией поля по любому контуру L и потоком вихря поля через любую поверхность, ограниченную контуром L.

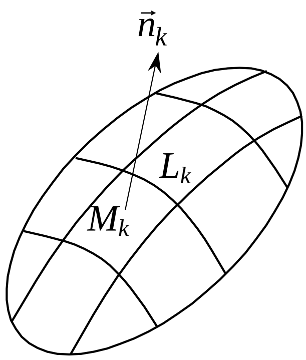


Рисунок 6.3.

Теорема 6.2. (Теорема Стокса). *Циркуляция поля* $\vec{a}(M)$ по контуру L *равна потоку вихря поля через любую поверхность S, лежащую в векторном поле и имеющую своей границей контур L:*

$$\oint_L \vec{a}d\vec{r} = \iint_S rot\,\vec{a}\,d\vec{S}\,. \qquad (6.8)$$

При этом предполагается, что на поверхности S все частные производные первого порядка от функций a_x, a_y, a_z *непрерывны.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы похоже на доказательство теоремы Гаусса-Остроградского.

Пусть на контур L натянута произвольная поверхность S (рисунок 6.3). Разобьём поверхность S на n элементарных площадок: ΔS_1, $\Delta S_2, \ldots$, $\Delta S_k, \ldots$, ΔS_n, ограниченных замкнутыми линиями L_1, $L_2, \ldots$, $L_k, \ldots$, L_n. В каждой из этих площадок возьмем точки M_1, $M_2, \ldots$, $M_k, \ldots$, M_n и определим в каждой из этих точек M_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$ проекции вихря поля на направление нормального вектора $\vec{n}_k$:

$$rot_{\vec{n}}\vec{a}(M_k) = \lim_{D(\Delta S_k)\to 0} \frac{\oint\limits_{L_k} \vec{a}d\vec{r}}{\Delta S_k} \quad \left(k = \overline{1,n}\right).$$

Установив в предыдущем пункте формулу (6.2), мы доказали существование проекции вихря поля на любое направление, то есть существование предела:

$$\lim_{D(\Delta S_k)\to 0} \frac{\oint\limits_{L_k} \vec{a}d\vec{r}}{\Delta S_k} \quad \left(k = \overline{1,n}\right).$$

По определению предела переменной известно, что абсолютная величина разности между пределом и значениями перемененной становится, начиная с некоторого значения переменной, меньше любого положительного числа $\varepsilon > 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – любое положительное число; тогда $\frac{\varepsilon}{S} > 0$, где S – площадь заданной поверхности, также любое положительное число. Выберем $D(\Delta S_k)$ настолько малыми, чтобы выполнялись неравенства:

$$\left| rot_{\vec{n}}\vec{a}(M_k) - \frac{\oint\limits_{L_k} \vec{a}d\vec{r}}{\Delta S_k} \right| < \frac{\varepsilon}{S} \quad \left(k = \overline{1,n}\right).$$

Умножив на ΔS_k и просуммировав, получим:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} rot_{\vec{n}}\vec{a}(M_k)\Delta S_k - \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{L_k} \vec{a}d\vec{r} \right| < \frac{\varepsilon}{S} \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k . \qquad (6.9)$$

В правой части неравенства имеем: $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta S_k = S$ – площадь поверхности, ограниченной S, и, сократив на S, получим ε. Далее, в сумме $\sum\limits_{k=1}^{n} \oint\limits_{L_k} \vec{a}d\vec{r}$ интегралы по всем линиям, лежащие внутри L, попарно уничтожаются, так как интегрирование по ним производится дважды в двух взаимно противоположных направлениях. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{L_k} \vec{a}d\vec{r} = \oint\limits_{L} \vec{a}d\vec{r} .$$

Подставив полученное в неравенство (6.9), получим:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} rot_{\vec{n}}\vec{a}(M_k)\Delta S_k - \oint\limits_{L} \vec{a}d\vec{r} \right| < \varepsilon .$$

Из последнего неравенства видно, что разность между переменной величиной $\sum\limits_{k=1}^{n} rot_{\vec{n}}\vec{a}(M_k)\Delta S_k$ и постоянной $\oint\limits_{L} \vec{a}d\vec{r}$ становится меньше любого наперед заданного положительного числа ε. Поэтому из определения предела переменной следует:

$$\sum_{k=1}^{n} rot_{\vec{n}}\vec{a}(M_k)\Delta S_k = \oint_L \vec{a}d\vec{r}\ .$$

Полученный здесь предел интегральной суммы есть поверхностный интеграл от скалярного произведения $rot\,\vec{a}\,d\vec{S}$ по поверхности S. А поэтому

$\oint_L \vec{a}d\vec{r} = \iint_S rot\,\vec{a}\,d\vec{S}$, что и требовалось доказать.

Замечание. *Дивергенция и вихрь векторного поля характеризуют свойства поля «в малом», то есть в достаточно малой области (точке) поля. Теоремы Гаусса-Остроградского и Стокса характеризуют векторное поле «в целом», то есть в любых, не обязательно малых, областях.*

Пример 6.2. Вычислим циркуляцию поля примера 5.2, пользуясь теоремой Стокса.

Определим вихрь поля:

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x & y & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

По теореме Стокса $\oint_L \vec{a}d\vec{r} = \iint_S rot\,\vec{a}\,d\vec{S}$. Отсюда заключаем сразу, что:

$$\Gamma = \oint_L \vec{a}d\vec{r} = 0$$

Тот же результат получен в примере 5.2, но по теореме Стокса сделали гораздо быстрей.

Лекция № 7. Соленоидальное и потенциальное поля

7.1. Соленоидальное поле

Определение 7.1. *Поле вектора $\vec{a}(M)$ называется соленоидальным, если дивергенция вектора $\vec{a}$ в каждой точке поля равна нулю:*

$$div\,\vec{a}(M) = 0\,. \qquad (7.1)$$

Из физического смысла дивергенции следует, что *в соленоидальном поле нет ни источников, ни стоков*. В соленоидальном поле *векторные линии* не могут нигде ни начинаться, ни кончаться; они *могут уходить в бесконечность или быть замкнутыми*.

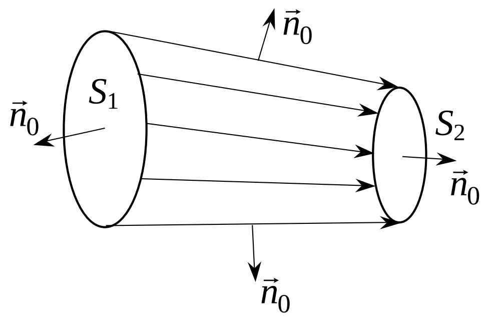


Рисунок 7.1.

В самом деле, выделим в поле *векторную трубку* – часть поля, ограниченную векторными линиями (рисунок 7.1). Пересечем векторную трубку двумя поперечными сечениями S_1 и S_2 и вычислим поток поля через замкнутую поверхность, образованную сечениями S_1, S_2 и частью боковой поверхности трубки, заключенную между сечениями S_1 и S_2.

Так как $div\,\vec{a}(M)=0$, то по теореме Гаусса-Остроградского имеем:

$$\oiint_S \vec{a}d\vec{s}=\iiint_V div\,\vec{a}\,d\vec{V}=0$$

или

$$\iint_{S_{áîê}} \vec{a}\,d\vec{S}+\iint_{S_1} \vec{a}\,d\vec{S}+\iint_{S_2} \vec{a}\,d\vec{S}=0\,.$$

На боковой поверхности $S_{áîê}$ вектор $\vec{a}\perp\vec{n}_0$ (так как вектор направлен по касательной к векторной линии и поэтому лежит в касательной плоскости к поверхности векторной трубки), поэтому $\vec{a}\perp d\vec{S}$, так как вектор $d\vec{S}$ направлен по нормали $\vec{n}_0$ и $\vec{a}d\vec{S}=0$; $\iint_{S_{áîê}} \vec{a}\,d\vec{S}=0$. Отсюда:

$$\iint_{S_1} \vec{a}\,d\vec{S}+\iint_{S_2} \vec{a}\,d\vec{S}=0\,.$$

В обоих интегралах направление нормалей на S_1 и S_2 берутся внешними по отношению к замкнутой поверхности S и на S_1 (см. рисунок 7.1), внешняя нормаль направлена в сторону, противоположную направлению векторных линий, и потому имеем:

$$\iint_{S_2} \vec{a}\,d\vec{S}-\iint_{S_1} \vec{a}\,d\vec{S}=0,$$

где в обоих интегралах, стоящих справа, вектор $d\vec{S}$ направлен по нормали $\vec{n}_0$, направленной в сторону векторных линий.

Из предыдущего равенства получим:

$$\iint_{S_1} \vec{a}\,d\vec{S}=\iint_{S_2} \vec{a}\,d\vec{S}\,.$$

Таким образом, мы показали, что поток соленоидального поля через любое поперечное сечение векторной трубки имеет одно и то же значение, то есть *через любое поперечное сечение трубки проходит одно и то же число векторных линий, а поэтому векторные линии не возникают и не пропадают*.

Пример 7.1. Поле электрической напряженности $\vec{E}=\dfrac{q\vec{r}}{r^3}$ соленоидально всюду, за исключением начала координат (ранее было показано, что всюду, где $r\neq 0$ $div\,\vec{E}=0$). Здесь векторными линиями являются лучи, выходящие из начала координат, – линии, уходящие в бесконечность.

7.2. Потенциальное поле

Определение 7.2. *Поле вектора* $\vec{a}(M)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ *называется потенциальным, если вектор* $\vec{a}$ *является градиентом некоторой скалярной* *функции $\varphi(x, y, z)$:*

$$\vec{a} = grad\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\,. \tag{7.2}$$

Определение 7.3. *Функция $\varphi(x, y, z)$ называется в этом случае потенциальной функцией поля.*

Лемма 7.1. *Если $\varphi(x, y, z)$ – потенциальная функция поля вектора $\vec{a}$, то $\varphi(x, y, z) + C$, где C – любое постоянное число, тоже будет потенциальной.*

Доказательство:

$grad(\varphi + C) = grad\,\varphi + grad\,C = grad\,\varphi = \vec{a}$.

Справедливо и обратное утверждение.

Лемма 7.2. *Если две функции $\varphi_1(x, y, z)$ и $\varphi_2(x, y, z)$ являются потенциальными функциями поля вектора $\vec{a}$, то они отличаются друг от друга только на постоянное слагаемое.*

Доказательство:

Действительно, пусть $\vec{a} = grad\,\varphi_1$ и $\vec{a} = grad\,\varphi_2$, тогда $\vec{a} = grad\,\varphi_1 - grad\,\varphi_2 = \vec{a} - \vec{a} = 0$, поэтому $\varphi_1 - \varphi_2 = C$, где $C = const$.

Итак, если $\varphi(x, y, z)$ – какая-либо потенциальная функция поля вектора $\vec{a}$, то $\varphi(x, y, z) + C$ – общий вид всех потенциальных функций вектора $\vec{a}$.

Определение 7.3. *Если $\varphi(x, y, z)$ – какая-либо потенциальная функция поля вектора $\vec{a}$, то функция $\varphi_1 = -\varphi(x, y, z)$ называется потенциалом поля вектора $\vec{a}$.*

Пример 7.2. Поле напряженности $\vec{E} = \dfrac{q\vec{r}}{r^3}$ точечного заряда q, помещенного в начале координат, является потенциальным полем, так как градиент скалярной функции $\varphi = -\dfrac{q}{r}$ равен $\vec{E}$. В самом деле,

$$grad\left(-\frac{q}{r}\right) = \frac{q}{r^2}\,grad\,\vec{r} = \frac{q}{r^2}\,grad\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} =$$

$$= \frac{q}{r^2}\,\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{q}{r^3}\vec{r} = \vec{E}.$$

Функция $\varphi_1 = \dfrac{q}{r}$ будет потенциалом поля напряженности.

Поле не всякого вектора будет потенциальным. Рассмотрим признак потенциальности поля.

Теорема 7.1. (Признак потенциальности поля). *Для того, чтобы поле вектора $\vec{a}(x, y, z)$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы вихрь этого поля равнялся нулю:*

$$rot\,\vec{a} = 0\,. \tag{7.3}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть поле, образованное вектором

$\vec{a}(x, y, z)$, будет потенциальным, тогда согласно определению вектор $\vec{a} = grad\,\varphi$, то есть

$$a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

Откуда заключаем, что проекции вектора $\vec{a}$ равны:

$$a_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x};\ a_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y};\ a_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Найдем вихрь поля.

$$rot\,\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cdot\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cdot\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cdot\vec{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}\right)\cdot\vec{i} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\right)\cdot\vec{j} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)\cdot\vec{k} = 0,$$

так как смешанные производные от порядка дифференцирования не зависят (имеется, в виду, что как функция $\varphi(x, y, z)$, так и ее производные – непрерывные функции в данном поле), то есть необходимость доказана.

Достаточность. Пусть вихрь поля равен нулю:

$$0 = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cdot\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cdot\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cdot\vec{k}.$$

Отсюда заключаем:

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = 0;\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = 0. \tag{7.4}$$

Как известно из математического анализа, для того чтобы выражение

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz \tag{7.5}$$

было бы полным дифференциалом некоторой функции $\varphi(x, y, z)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (7.4). Но условия (7.4) выполняются, поэтому выражение (7.5) является полным дифференциалом $d\varphi$ некоторой функции $\varphi = \varphi(x, y, z)$:

$$\varphi(M) = \varphi(x, y, z) = \int_{M_0}^{M}\vec{a}d\vec{r} = \int_{M_0(x_0, y_0, z_0)}^{M(x, y, z)} a_x dx + a_y dy + a_z dz. \tag{7.6}$$

Полный дифференциал функции $\varphi(M)$ равен:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz = a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

откуда заключаем, что $a_x = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $a_y = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, $a_z = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$ и вектор $\vec{a}$ равен:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = grad\,\varphi,$$

то есть поле вектора $\vec{a}$ потенциально. Достаточность доказана.

Свойства потенциального поля

1) *Потенциальное поле вполне характеризуется лишь одной скалярной функцией* $\varphi(x, y, z)$, *в то время как любое векторное поле* $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ *определяется тройкой скалярных функций* a_x, a_y, a_z.

2) ***Теорема 7.2.*** *Циркуляция в потенциальном поле по любому контуру равна нулю.*

Доказательство. Действительно, пусть поле вектора $\vec{a}$ – потенциально и пусть L – любой замкнутый контур, S – поверхность, натянутая на контур L, лежащая в поле вектора $\vec{a}$. По теореме Стокса можно записать:

$$\Gamma = \oint_L \vec{a}d\vec{r} = \iint_S rot\,\vec{a}\,d\vec{S}.$$

По теореме 7.1 вихрь в потенциальном поле равен нулю, поэтому $\Gamma = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема 7.2 имеет место, если на любой поверхности, ограниченной контуром L, поле вектора $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ определено, непрерывно и имеет непрерывные производные от a_x, a_y, a_z, так как при этих условиях имеет место теорема Стокса. Если же циркуляция вычисляется по контуру, внутри которого векторное поле не везде существует (тогда теорема Стокса не имеет места), то она может быть и отлична от нуля. Убедимся в этом на следующем примере.

Пример 7.3. Магнитное поле напряженности $\vec{H} = \dfrac{2J}{x^2 + y^2}\left(x\vec{j} - y\vec{j}\right)$ линейного тока J потенциально, так как

$$rot\,\vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\dfrac{2Jy}{x^2 + y^2} & \dfrac{2Jx}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \cdot 0 + \vec{j} \cdot 0 + \vec{k} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{2Jx}{x^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{2Jy}{x^2 + y^2} \right) = 0.$$

Потенциальная функция $\varphi(x, y)$ для него равна:

$$\varphi(x, y) = 2J \cdot arctg\,\frac{y}{x} + C.$$

Действительно,

$$grad\left(2J\cdot arctg\frac{y}{x}+C\right)=grad\left(2J\cdot arctg\frac{y}{x}\right)=2J\left(\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\vec{i}+\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\vec{j}\right)=$$

$$=\frac{2J}{x^2+y^2}\left(x\vec{j}-y\vec{i}\right)=\vec{H}.$$

Но циркуляция по окружности $x^2+y^2=r^2$ не будет равна нулю. В самом деле, в точках окружности имеем $x^2+y^2=r^2=const$ и поэтому:

$$\Gamma=\oint_L \vec{H}d\vec{r}=\oint_L \frac{2J\left(x\vec{j}-y\vec{i}\right)}{x^2+y^2}d\vec{r}=\frac{2J}{r^2}\oint_L\left(xdy-ydx\right).$$

Но, как известно из теории криволинейных интегралов $\frac{1}{2}\oint_L\left(xdy-ydx\right)$ выражает площадь фигуры, ограниченной кривой *L*, поэтому $\oint_L\left(xdy-ydx\right)=2\pi r^2$ – как двойная площадь круга, учитывая это, получим $\Gamma=4\pi J$.

Здесь циркуляция $\Gamma\neq 0$ потому, что в одной из внутренних точек контура – центре окружности – поле $\vec{H}$ не определено. Циркуляция же поля по любому контуру, внутри которого поле непрерывно вместе с производными проекций вектора $\vec{H}$, будет равна нулю.

3) ***Следствие.*** *В потенциальном поле криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.*

Действительно, соединим выбранные точки M_1 и M_2 двумя произвольными путями M_1AM_2 и M_1BM_2 (рисунок 7.2). Рассмотрим замкнутый контур $L=M_1AM_2BM_1$

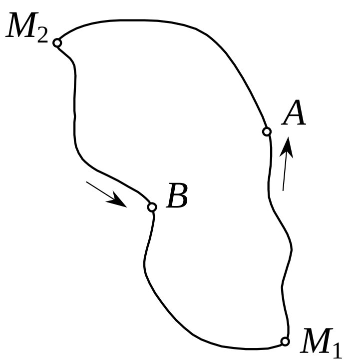


Рисунок 7.2.

Циркуляция по нему:

$$\Gamma=\oint_L \vec{a}d\vec{r}=\int_{M_1AM_2}\vec{a}d\vec{r}+\int_{M_2BM_1}\vec{a}d\vec{r}=\int_{M_1AM_2}\vec{a}d\vec{r}-\int_{M_1BM_2}\vec{a}d\vec{r}.$$

По теореме 7.2 $\Gamma=0$, поэтому

$$\int_{M_1AM_2}\vec{a}d\vec{r}=\int_{M_1BM_2}\vec{a}d\vec{r},$$

то есть следствие доказано.

Замечание, указанное выше, остается и для следствия. Теорема 7.1 дает возможность узнать, является ли векторное поле $\vec{a}$ потенциальным, а также вместе со следствием дает возможность найти потенциальную функцию.

4) *Криволинейный интеграл потенциального*

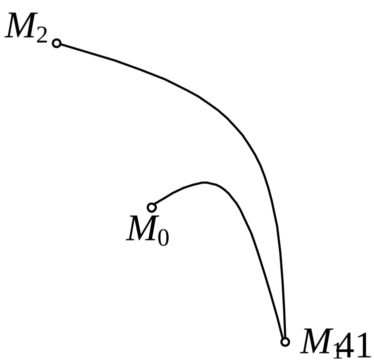


Рисунок 7.3.

поля на пути M_1M_2 *M_XM_2 равен разности потенциальной функции в конечной и начальной точках этого пути.*

Действительно, если зафиксировать некоторую точку M_0, тогда по формуле (7.6)

$$\varphi(M_1) = \int_{M_0}^{M_1} \vec{a}d\vec{r}, \ \varphi(M_2) = \int_{M_0}^{M_2} \vec{a}d\vec{r}.$$

Если путь M_0M_2 выбрать так, чтобы проходил через точку M_1 (рисунок 7.3), то

$$\int_{M_0}^{M_2} \vec{a}d\vec{r} = \int_{M_0}^{M_1} \vec{a}d\vec{r} + \int_{M_1}^{M_2} \vec{a}d\vec{r},$$

откуда

$$\int_{M_1}^{M_2} \vec{a}d\vec{r} = \int_{M_0}^{M_2} \vec{a}d\vec{r} - \int_{M_0}^{M_1} \vec{a}d\vec{r} = \varphi(M_2) - \varphi(M_1).$$

Эта формула напоминает известную формулу Ньютона-Лейбница для определенных интегралов.

Таким образом, формула Ньютона—Лейбница переносится на криволинейные интегралы в потенциальном поле, только роль первообразной функции играет здесь потенциальная функция $\varphi(M)$ поля $\vec{a} = grad\,\varphi$.

Лекция № 8. Операции второго порядка. Оператор Лапласа. Символический вектор Гамильтона

8.1. Операции второго порядка. Оператор Лапласа

В предыдущих лекциях мы ввели понятия основных величин поля: вектора $grad\,\varphi$, характеризующего скорость изменения скалярного поля, скаляра $div\,\vec{a}$, характеризующего интенсивность источника (или стока), и вектора $rot\,\vec{a}$, характеризующего вращательную способность векторного поля. Так как каждая из этих величин вычисляется путем вычисления частных производных первого порядка, их называют *операциями первого порядка,* переводящими соответственно скаляр в вектор $(grad\,\varphi)$, вектор в скаляр $(div\,\vec{a})$, вектор в вектор $(rot\,\vec{a})$.

Скалярная величина $div\,\vec{a}$, как и любая скалярная функция $\varphi(M)$, образует скалярное поле, а вектор $grad\,div\,\vec{a}$ будет вектором, характеризующим скорость изменения скалярного поля $\vec{a}$. Так же векторные величины $grad\,\varphi$ и $rot\,\vec{a}$ определяют векторные поля. Каждое из этих векторных полей характеризуется величинами скалярной – дивергенцией и векторной – вихрем. Итак, мы получаем пять *операций второго порядка*:

1) $grad\,div\,\vec{a}$;

2) $div\, grad\, \varphi$;

3) $rot\, grad\, \varphi$;

4) $div\, rot\, \vec{a}$;

5) $rot\, rot\, \vec{a}$.

Найдем каждую из этих величин.

1) $grad\, div\, \vec{a} = \vec{i}\, \frac{\partial}{\partial x}(div\, \vec{a}) + \vec{j}\, \frac{\partial}{\partial y}(div\, \vec{a}) + \vec{k}\, \frac{\partial}{\partial z}(div\, \vec{a}) =$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} \right) + \vec{j}\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial z} \right) + \qquad (8.1)$$

$$+ \vec{k}\, \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2} \right).$$

Здесь мы воспользовались свойством смешанной производной: $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M)$.

2) В векторном анализе и в приложениях часто используется оператор Лапласа, или лапласиан, обозначаемый обычно буквой Δ (дельта).

Определение 8.1. *Оператором Лапласа, или лапласианом, называется закон образования дивергенций от вектора* $grad\, \varphi$*:*

$$\Delta\varphi = div\, grad\, \varphi.$$

Из определения лапласиана и физического смысла дивергенции следует физический смысл лапласиана: численное значение лапласиана характеризует интенсивность источников (если $\Delta\varphi > 0$) или стоков (если $\Delta\varphi < 0$) векторного поля $grad\, \varphi$.

Найдем лапласиан $\Delta\varphi$:

$$div\, grad\, \varphi = div\left(\vec{i}\, \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\, \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \qquad (8.2)$$

3) В доказательстве необходимости теоремы 7.1 (признак потенциальности поля) мы получили, что

$$rot\, grad\, \varphi = 0. \qquad (8.3)$$

4) Вычислим $div\, rot\, \vec{a}$:

$$div\, rot\, \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(rot\, \vec{a})_x + \frac{\partial}{\partial y}(rot\, \vec{a})_y + \frac{\partial}{\partial z}(rot\, \vec{a})_z =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} = 0.$$

Итак,

$$div\, rot\, \vec{a} = 0. \tag{8.4}$$

А поэтому векторное поле вихрей $rot\, \vec{a}(M)$ данного вектор поля $\vec{a}(M)$ соленоидально.

5) Вычислим теперь $rot\, rot\, \vec{a}$; вычислим проекцию на ось x:

$$(rot\, rot\, \vec{a})_x = \frac{\partial}{\partial y}(rot\, \vec{a})_z - \frac{\partial}{\partial z}(rot\, \vec{a})_y =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} =$$

$$= \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} div\, \vec{a} - \Delta a_x.$$

Аналогично проекции на оси y и z равны:

$$(rot\, rot\, \vec{a})_y = \frac{\partial}{\partial y} div\, \vec{a} - \Delta a_y,$$

$$(rot\, rot\, \vec{a})_z = \frac{\partial}{\partial z} div\, \vec{a} - \Delta a_z.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} rot\, rot\, \vec{a} &= \vec{i}\left(\frac{\partial}{\partial x} div\, \vec{a} - \Delta a_x\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial}{\partial y} div\, \vec{a} - \Delta a_y\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial z} div\, \vec{a} - \Delta a_z\right) \\ &= \left[\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} div\, \vec{a} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} div\, \vec{a} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z} div\, \vec{a}\right] - \left(\vec{i}\,\Delta a_x + \vec{j}\Delta a_y + \vec{k}\Delta a_z\right). \end{aligned} \tag{8.5}$$

Но выражение, стоящее в квадратных скобках, равно $grad\, div\, \vec{a}$, а выражение в круглых скобках равно вектору:

$$\Delta\vec{a} = \vec{i}\,\Delta a_x + \vec{j}\Delta a_y + \vec{k}\Delta a_z.$$

Вектор $\Delta\vec{a}$ получен в результате применения оператора Лапласа к вектору $\vec{a}$.

Заменяя в равенстве (8.5) скобки их значениями, получим:

$$rot\, rot\, \vec{a} = grad\, div\, \vec{a} - \Delta\vec{a}. \tag{8.6}$$

8.2. Символический вектор Гамильтона

Известным ученым физиком и математиком Гамильтоном был введен символический вектор ∇ (читается «набла»), который носит название *вектора Гамильтона,* или *оператора Гамильтона*:

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

Сам вектор не имеет реального смысла, но результат применения его как оператора к скалярным или векторным функциям дает вполне реальную физическую величину. Например, произведение вектора ∇ на скалярную функцию $\varphi(x,y,z)$ дает вектор:

$$\nabla\varphi = \vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} = grad\,\varphi,$$

то есть

$$\nabla\varphi = grad\,\varphi. \tag{8.7}$$

Если вектор умножить скалярно на вектор

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

то получится скалярная величина $div\,\vec{a}$:

$$\nabla\vec{a} = \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\right) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = div\,\vec{a}.$$

то есть

$$\nabla\vec{a} = div\,\vec{a}. \tag{8.8}$$

Если же вектор ∇ умножить векторно на вектор $\vec{a}$, то получается вектор – вихрь поля:

$$[\nabla\vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = rot\,\vec{a}. \tag{8.9}$$

При помощи символического вектора ∇ легко получаются многие важные формулы векторного анализа. Найдем, например, с помощью вектора ∇ часть операций второго порядка.

1) $div\,grad\,\varphi = (\nabla grad\,\varphi) = \nabla(\nabla\varphi) = \nabla\nabla\varphi = \nabla^2\varphi =$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi. \tag{8.10}$$

Поэтому обычно полагают:

$\nabla\nabla = \Delta$.

2) $rot\,grad\,\varphi = [\nabla grad\,\varphi] = [\nabla\nabla\varphi]$.

Векторы ∇ и $\nabla\varphi$ коллинеарны, так как φ – скаляр, поэтому их векторное произведение равно нулю:

$$rot\,grad\,\varphi = [\nabla\nabla\varphi] = 0. \tag{8.11}$$

3) $div\,rot\,\vec{a} = \nabla rot\,\vec{a} = \nabla[\nabla\vec{a}] = 0,$ (8.12)

так как вектор $[\nabla\vec{a}]$ как векторное произведение двух векторов перпендикулярно к каждому из сомножителей, так что $[\nabla\vec{a}] \perp \nabla$, а скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов равно нулю: $\nabla[\nabla\vec{a}] = 0$.

4) $rot\,rot\,\vec{a} = [\nabla rot\,\vec{a}] = [\nabla[\nabla\vec{a}]] = \nabla(\nabla\vec{a}) - (\nabla\nabla)\vec{a} = \nabla div\,\vec{a} - \Delta\vec{a} =$

$= grad\,div\,\vec{a} - \Delta\vec{a}.$

$$rot\,rot\,\vec{a} = grad\,div\,\vec{a} - \Delta\vec{a}. \tag{8.13}$$

Замечание. Приведенные здесь рассуждения нельзя считать обоснованными доказательствами. Мы оперировали с символом ∇ как с обычным вектором, а это, вообще говоря, неверно. Так, например, если на символ ∇ смотреть как на обычный вектор, то из равенства: $rot\,\vec{a} = [\nabla\vec{a}]$ следует, что вектор $rot\,\vec{a}$ как векторное произведение двух векторов перпендикулярен к обоим сомножителям, то есть $rot\,\vec{a} \perp \vec{a}$; на самом деле, $rot\,\vec{a} \perp \vec{a}$, как это мы видели, не всегда.

Поэтому обращение с символом ∇ требует осторожности.

Приведенные нами выводы формул (8.10), (8.11), (8.12), (8.13) надо считать мнемоническими правилами, а не доказательствами. Строго обоснованные выводы указанных формул даны в пункте 8.1.

Лекция № 9. Основные уравнения электромагнитного поля

Определение 9.1. *Электромагнитным полем называется часть пространства, каждой точке которого $M(x, y, z)$ поставлены в соответствие вектор $\vec{E}$ напряженности электрического поля и вектор $\vec{H}$ напряженности магнитного поля.*

Последние в общем случае зависят не только от рассматриваемой точки, но также и от времени t (случай нестационарного поля), то есть являются функциями координат x, y, z и времени t:

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t);\ \vec{H} = \vec{H}(x, y, z, t).$$

9.1. Уравнения Максвелла

Известно из физики, что среда, в которой происходят электрические и связанные с ними магнитные явления, характеризуются величинами: γ – проводимостью, ε – диэлектрической проницаемостью, μ – магнитной проницаемостью. В однородной среде γ, ε, μ будут постоянными величинами, но в общем случае они также будут функциями x, y, z и t.

Пусть $\vec{i}$ – вектор плотности электрического тока, то есть вектор, численно равный количеству электричества, протекающего в единицу времени (вернее, производной от количества электричества по времени) через единичную площадку, перпендикулярную направлению движения электричества, причем вектор $\vec{i}$ направлен в сторону этого движения. Вектор плотности $\vec{i}$ состоит из двух составляющих: тока проводимости $\gamma\vec{E}$ (закон Ома) и тока смещения, получаемого вследствие явления индукции в диэлектриках; он равен $\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial(\varepsilon\vec{E})}{\partial t}$.

Поэтому

$$\vec{i} = \gamma\vec{E} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial(\varepsilon\vec{E})}{\partial t}. \tag{9.1}$$

Рассмотрим произвольную замкнутую кривую, ограничивающую поверхность S. Закон электромагнитной индукции Фарадея гласит: циркуляция электрического вектора $\vec{E}$ (электродвижущая сила) вдоль L равна производной по времени от потока вектора магнитной индукции $\mu\vec{H}$ через поверхность S, взятой со знаком «минус»:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mu\vec{H}d\vec{S}.$$

Из математического анализа известно, что при общих предположениях относительно подынтегральной функции дифференцирование по параметру (в данном случае по t) можно совершать под знаком интеграла, поэтому закону Фарадея можно придать вид:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{r} = -\iint_S \frac{\partial\left(\mu\vec{H}\right)}{\partial t}d\vec{S}.$$

Левую часть последнего равенства преобразуем по теореме Стокса:

$$\iint_S rot\,\vec{E}\,d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial\left(\mu\vec{H}\right)}{\partial t}d\vec{S}. \qquad (9.2)$$

Формула (9.2) имеет место для любой поверхности S, а это возможно только тогда, когда подынтегральные функции совпадают. Поэтому

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\left(\mu\vec{H}\right)}{\partial t}. \qquad (9.3)$$

Уравнение (9.3) называется *вторым уравнением Максвелла в векторной форме.*

Первое уравнение Максвелла получается следующим образом. В примере 7.4 было показано, что циркуляция вектора магнитной напряженности $\vec{H}$ вдоль границы сечения провода, по которому течет ток силы J, равна $4\pi J$. Этот результат распространяют на произвольное электромагнитное поле

,

где J означает количество электричества, протекающего через S в единицу времени. Принимая во внимание смысл $\vec{i}$ и формулу (9.1), будем иметь:

$$J = \iint_S \vec{i}\,d\vec{S} = \iint_S \left[\gamma\vec{E} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\left(\varepsilon\vec{E}\right)}{\partial t}\right]d\vec{S}.$$

Следовательно,

$$\oint_L \vec{H}d\vec{r} = 4\pi\iint_S \left[\gamma\vec{E} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\left(\varepsilon\vec{E}\right)}{\partial t}\right]d\vec{S}.$$

Применяя к левой части полученного равенства теорему Стокса и отождествляя затем подынтегральные функции в обеих частях равенства, мы приходим к *первому уравнению Максвелла в векторной форме*:

$$rot\,\vec{H} = 4\pi\left[\gamma\vec{E} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\left(\varepsilon\vec{E}\right)}{\partial t}\right].$$

Чтобы иметь возможность измерять величины, связанные с электрическим или магнитным полями, в абсолютных электростатических и электромагнитных единицах, в правые части уравнений Максвелла вводят множитель $\frac{1}{c}$, где $c = 3 \cdot 10^{10}\ \frac{\text{ñì}}{\text{ñ}}$ – скорость света в вакууме. Тогда уравнения Максвелла приобретают вид:

$$rot\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left[\gamma\vec{E} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\left(\varepsilon\vec{E}\right)}{\partial t}\right]; \tag{9.4}$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\left(\mu\vec{H}\right)}{\partial t}. \tag{9.5}$$

К этим двум основным уравнениям Максвелла прибавляют два дополнительных. Последние получаются из следующих соображений. В задачах было установлено, что дивергенция вектора электростатической индукции объемного заряда плотности ρ равна $4\pi\rho$, а дивергенция вектора $\vec{H}$ напряженности электромагнитного поля, образованного током, текущим по бесконечно длинному приводу, равна нулю.

Для произвольного электромагнитного поля эти соотношения сохраняются, только их относят, соответственно, к векторам $\varepsilon\vec{E}$ и $\mu\vec{H}$.

Таким образом,

$$div\left(\varepsilon\vec{E}\right) = 4\pi\rho \tag{9.6}$$

и

$$div\left(\mu\vec{H}\right) = 0. \tag{9.7}$$

Если электромагнитное поле не содержит электрических зарядов, то их плотность ρ равна нулю, и уравнение (9.6) принимает вид:

$$div\left(\varepsilon\vec{E}\right) = 0. \tag{9.8}$$

Напишем также уравнение Максвелла в проекциях векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Пусть разложение векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ имеет вид:

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k},\ \vec{H} = H_x\vec{i} + H_y\vec{j} + H_z\vec{k}.$$

Векторы равны только в том случае, когда равны их проекции на оси координат, поэтому уравнение (9.4) равносильно следующим трем уравнениям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z} = \dfrac{1}{c}\left[4\pi\gamma E_x + \dfrac{\partial\left(\varepsilon E_x\right)}{\partial t}\right], \\ \dfrac{\partial H_x}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = \dfrac{1}{c}\left[4\pi\gamma E_y + \dfrac{\partial\left(\varepsilon E_y\right)}{\partial t}\right], \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = \dfrac{1}{c}\left[4\pi\gamma E_z + \dfrac{\partial\left(\varepsilon E_z\right)}{\partial t}\right]. \end{cases} \tag{9.9}$$

Уравнение (9.5) дает

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial(\mu H_x)}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial(\mu H_y)}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial(\mu H_z)}{\partial t}. \end{cases} \tag{9.10}$$

Уравнения (9.6) и (9.7) принимают вид:

$$\frac{\partial(\varepsilon E_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varepsilon E_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varepsilon E_z)}{\partial z} = 4\pi\rho\,, \tag{9.11}$$

$$\frac{\partial(\mu H_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu H_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu H_z)}{\partial z} = 0\,. \tag{9.12}$$

Зная свойства среды, то есть γ, ε и μ, а также некоторые начальные и граничные условия, можно решить вопрос о нахождении вида поля в любой момент времени t путем интегрирования уравнений (9.9), (9.10), (9.11) и (9.12).

Рассмотрим теперь случай, когда физическая среда однородна и не содержит электрических зарядов, то есть когда γ, ε и μ – постоянные величины, а $\rho = 0$. Тогда в уравнениях (9.4), (9.5), (9.7) и (9.8) γ, ε и μ можно как постоянные величины вынести за знак дифференцирования и отбросить в (9.7) и (9.8) множители μ и ε. Получим:

$$rot\,\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left[\gamma\vec{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]; \tag{9.13}$$

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}; \tag{9.14}$$

$$div\,\vec{H} = 0; \tag{9.15}$$

$$div\,\vec{E} = 0. \tag{9.16}$$

Найдем ротор от обеих частей (9.13); учтем при этом, что смешанная производная не зависит от порядка дифференцирования. В результате получим:

$$rot\left(rot\,\vec{H}\right) = \frac{4\pi}{c}\left[\gamma\,rot\,\vec{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}rot\,\vec{E}\right]; \tag{9.17}$$

(γ и ε – постоянные величины).

В силу формул (8.6) и (9.15) будем иметь:

$$rot\,rot\,\vec{H} = grad\,div\,\vec{H} - \Delta\vec{H} = -\Delta\vec{H}\,.$$

Используя еще уравнение (9.14), уравнение (9.17) перепишем так:

$$-\Delta\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left[-\gamma\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{4c\pi}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}\right]$$

или

$$\Delta\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left[\gamma\frac{\mu}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{4c\pi}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}\right]. \qquad (9.18)$$

Это уравнение содержит только $\vec{H}$. Аналогично, совершив операцию взятия вихря над обеими частями уравнения (9.14), получим:

$$rot\left(rot\,\vec{E}\right) = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}rot\,\vec{H}.$$

Согласно формулам (8.6), (9.16) и (9.13) последнее уравнение может быть представлено в виде:

$$\Delta\vec{E} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{4\pi}{c}\left(\gamma\vec{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\right] = \frac{4\pi\mu}{c^2}\left(\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\right). \qquad (9.19)$$

Уравнения (9.18) и (9.15), с одной стороны, и уравнения (9.19) и (9.16), с другой стороны, по своей структуре совершенно одинаковы. Следовательно, мы можем утверждать, что в случае однородности среды и отсутствия электрических зарядов оба вектора электрической и магнитной напряженности $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяют одной и той же системе двух уравнений в частных производных второго и первого порядков:

$$\Delta\vec{v} = \frac{4\pi\mu}{c^2}\left(\gamma\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2}\right) \qquad (9.20)$$

и

$$div\,\vec{v} = 0, \qquad (9.21)$$

где вместо вектора $\vec{v}$ надо подставить или вектор $\vec{E}$, или вектор $\vec{H}$.

Уравнение (9.20) называется *уравнением распространения электромагнитных волн в однородной проводящей среде;* это же уравнение также называется *телеграфным уравнением,* так как оно встречается в задаче о распространении колебаний по длинным линиям.

Но два вектора равны только тогда, когда равны их проекции на три оси координат. Поэтому уравнению (9.20) должны удовлетворять порознь шесть величин: E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z – проекции векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ на оси координат, причем E_x, E_y, E_z и H_x, H_y, H_z в отдельности удовлетворяют уравнению (9.21), которому можно придать вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \qquad (9.22)$$

Если среда представляет собой идеальный диэлектрик, то $\gamma = 0$, и в уравнении (9.20) член, содержащий γ, обращается в нуль. Оно принимает более простой вид:

$$\Delta\vec{v} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2}$$

или

$$\Delta\vec{v} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2}, \tag{9.23}$$

где

$$a^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}$$

(под v, как и выше, можно подразумевать любую из величин E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z, причем E_x, E_y, E_z и H_x, H_y, H_z порознь связаны соотношением (9.22)).

Уравнение (9.23) называется *уравнением распространения электромагнитных волн в однородном диэлектрике*.