ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЁВА»

С.В. Подклетнова

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Самара - 2009

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЁВА»

С.В. Подклетнова

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний

С А М А Р А
Издательство СГАУ
2009

УДК 517.623
ББК

Составитель: **Подклетнова С.В.**

Рецензент: Старинова О.Л.

Элементы теории поля: Метод. указания / сост. С.В. Подклетнова. - Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2009. – 40 с.

Методические указания содержат примеры решения различных задач, задачи для проведения практических занятий и выполнения домашних заданий, варианты расчётно-графической работы по теории поля.

Учебное пособие выполнено на кафедре высшей математики и предназначено для студентов II-го курса 1-5 факультетов Самарского государственного аэрокосмического университета.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета.

Содержание

Занятие № 1. Скалярное и векторное поля и их графическое изображение

1. Скалярное поле и его графическое изображение.

Задание 1.1.1. Дать определение скалярного поля, а также физического, стационарного, нестационарного и плоскопараллельного скалярного полей. Привести примеры каждого из таких полей.

Задание 1.1.2. Дать определение поверхности равного уровня или эквипотенциальной поверхности. Рассказать, как строятся поверхности равного уровня.

Пример 1.1.1. Построить семейство поверхностей равного уровня скалярного поля потенциала $v = v(r) = \frac{e}{r}$ электростатического поля заряда e, помещенного в начале координат, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние от точки $M(x, y, z)$ до заряда.

Решение. Это скалярное поле определено для всех точек пространства, за исключением начала координат, где потенциал равен бесконечности.

Поверхности равного уровня

$$\frac{e}{r} = \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = C,$$

откуда

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{e}{C}.$$

Обозначим

$$\frac{e}{C} = C_1,$$

получим

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = C_1,$$

то есть эквипотенциальные поверхности – семейство сфер с центром в начале координат (рисунок 1.1).

Пример 1.1.2. Построить семейство направляющих линий плоскопараллельного поля $\varphi(x, y) = xy$.

Решение. Поле определено для всех точек плоскости; направляющими линиями будут:

$xy = C$ – семейство равносторонних гипербол $(C \neq 0)$, асимптотами которых будут оси координат (рисунок 1.2).

При

$C = 0$

$xy = 0$,

откуда

$x = 0$, $y = 0$ – координатные оси.

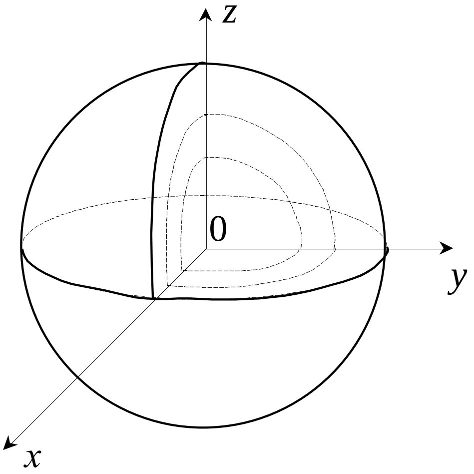

Рисунок 1.1.

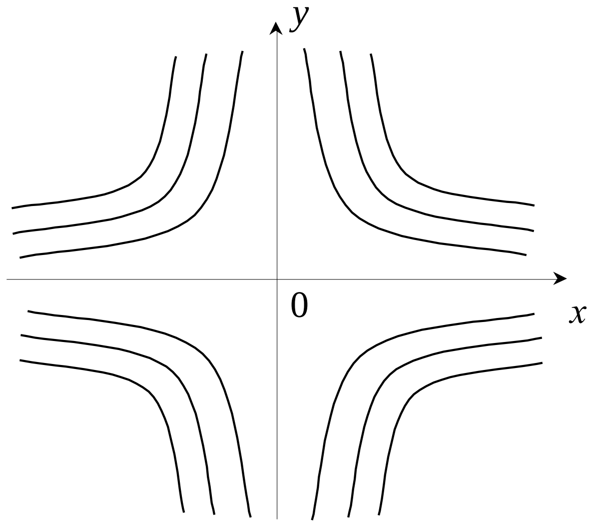

Рисунок 1.2.

Упражнения.

В следующих задачах установить область определения поля и составить уравнения поверхностей (направляющих линий) равного уровня данного скалярного поля $\varphi(M)$. Дать заключение о скорости изменения поля в различных точках пространства.

1. $\varphi(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
2. $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$.
3. $\varphi(x, y, z) = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$.
4. $\varphi(x, y, z) = \ln\left(4 - x^2 - y^2 - z^2\right)$.

2. Векторное поле и его графическое изображение.

Задание 1.2.1. Дать определение векторного поля, а также векторной или силовой линии векторного поля. Привести примеры векторных полей.

Задание 1.2.2. Вывести систему дифференциальных уравнений, определяющих векторные линии поля.

Пример 1.2.1. Найти векторные линии магнитного поля напряженности тока, текущего по прямому бесконечному проводу:

$$\vec{H} = \frac{2J}{x^2 + y^2}\left(-y\vec{i} + x\vec{j}\right).$$

Решение. В данном случае проекции вектора $\vec{H}$ на координатные оси Ox, Oy и Oz соответственно равны:

$$a_x = -\frac{2Jy}{x^2+y^2};$$

$$a_y = \frac{2Jx}{x^2+y^2};$$

$$a_z = 0.$$

Система дифференциальных уравнений векторных линий имеет вид:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

Эти уравнения принимают вид:

$$\frac{dx}{-\frac{2Jy}{x^2+y^2}} = \frac{dy}{\frac{2Jx}{x^2+y^2}} = \frac{dz}{0}$$

или

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Система распадается на два уравнения:

$$xdx = -ydy;\ dz = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C,\ z = h.$$

Или

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2C; \\ z = h. \end{cases}$$

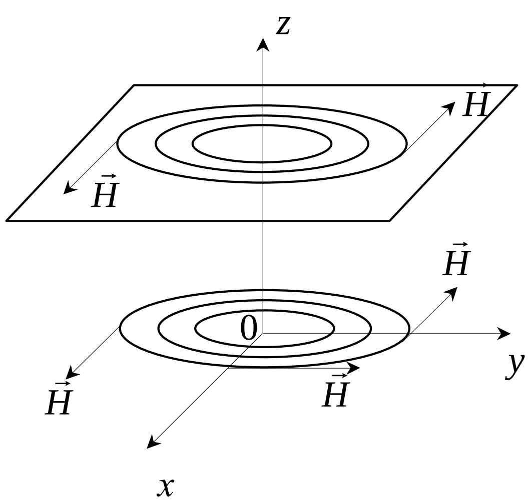

Рисунок 1.2.1.

Итак, силовыми линиями магнитного поля, образованного электрическим током с силой J, текущего по бесконечно длинному прямому проводу, являются окружности радиуса $\sqrt{2C}$ с центром на оси z в точке $z = h$, лежащие в плоскостях, перпендикулярных этой оси (рисунок 2.1).

Упражнения.

1. Найти векторные линии поля $\vec{a}(M) = \frac{\vec{i}}{x} + \frac{\vec{j}}{y}$.
2. Найти векторные линии поля $\vec{a}(M) = \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2\right)^3}}$.
3. Как известно, вектор $\vec{v}(M)$ линейных скоростей частиц жидкости, вращающейся вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω, может быть представлен в виде: $\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}]$, где $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ – вектор угловой скорости, направлен-

ный по оси z $\vec{k}$ – единичный вектор по оси z), $\vec{r}$ – радиус-вектор точки $M(x, y, z)$. Найти векторные линии поля.

Указание. Найти сначала вектор $\vec{v}$ как векторное произведение векторов $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ и $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$:

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \cdot \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\vec{i}\,\omega y + \vec{j}x\omega = \omega(-y\vec{i} + x\vec{j}).$$

Затем найти уравнение векторных линий.

4. Найти уравнение векторных линий поля $\vec{a}(M) = Cx\vec{i} - Cy\vec{j} - 2Cz\vec{k}$ $(C = const)$.

Занятие № 2. Производная скалярного поля по направлению. Градиент скалярного поля

1. Производная скалярного поля по направлению

Задание 2.1.1. Дать определение производной скалярного поля по направлению. Доказать теорему о производной по направлению.

Задание 2.1.2. Вывести производные по направлению базисных векторов.

Задание 2.1.3. Вывести производную по направлению плоскопараллельного поля.

Задание 2.1.4. В чем состоит геометрический смысл производной скалярного поля по направлению данного вектора.

Пример 2.1.1. Найти в точке $M_0(1,2)$ производную поля $\varphi(x, y) = 2x^3 - 3y^2$ по направлению, определяемому прямой, соединяющей точку M_0 с точкой $M(3,4)$.

Решение. Данное поле является плоскопараллельным. Производная плоскопараллельного поля по данному направлению определяется по формуле

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\sin\alpha. \qquad (2.1.1)$$

Вычислим частные производные первого порядка функции $\varphi(x, y)$ в точке $M_0(1,2)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 6x^2, \qquad \frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial x} = 6 \cdot 1^2 = 6;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -6y, \qquad \frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial x} = -6 \cdot 2 = -12.$$

Найдем единичный вектор $\vec{l_0}$ направления $\overline{M_0M}$:

$$\vec{l_0} = \frac{\overrightarrow{M_0M}}{\left|\overrightarrow{M_0M}\right|} = \frac{(3-1)\vec{i} + (4-2)\vec{j}}{\sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2}} = \frac{2\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{4+4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Подставим полученные значения частных производных и тригонометрических функций в формулу (2.1.1):

$$\frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial l} = 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{6\sqrt{2}}{2}.$$

Производная по направлению отрицательна, следовательно, поле $\varphi(x,y) = 2x^3 - 3y^2$ в точке M_0 по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M}$ является убывающим.

Пример 2.1.2. Найти производную скалярного поля $\varphi(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ в точке $M_0\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ по направлению окружности $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Решение. Данное поле является плоскопараллельным.

Направление окружности определяется направлением касательной к ней. Найдем параметрические уравнения данной окружности:

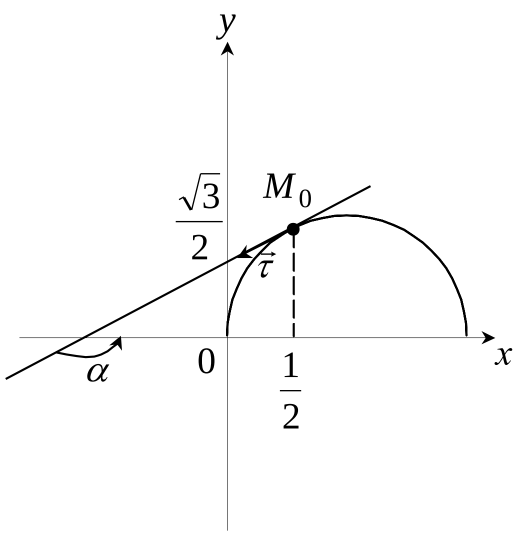

Рисунок 2.1.1.

$$x^2 + y^2 - 2x = 0;$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1;$$

$(x-1)^2 + y^2 = 1$ – окружность с центром $(1{,}0)$ и радиусом 1;

$$\begin{cases} x - 1 = \cos t; \\ y = \sin t, \end{cases}$$

$\begin{cases} x = 1 + \cos t; \\ y = \sin t \end{cases}$ – параметрические уравнения данной окружности.

Найдем значение параметра t, которое соответствует точке $M_0\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = 1 + \cos t; \\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = -\frac{1}{2}; \\ \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \Rightarrow t = \frac{2\pi}{3}.$$

Найдем теперь единичный касательный вектор $\vec{\tau}_0$ в точке M_0 к данной окружности (Рисунок 2.1.1).

Так как радиус-вектор данной окружности

$$\vec{r} = (1+\cos t)\cdot\vec{i} + \sin t\cdot\vec{j},$$

то по законам дифференциальной геометрии единичный вектор $\vec{\tau}_0$ в точке M_0, касательный к данной кривой, равен:

$$\vec{\tau}_0 = \frac{d\vec{r}(M_0)}{dt} = \left(-\sin t\cdot\vec{i} + \cos t\cdot\vec{j}\right)\Big|_{M_0} = -\frac{\vec{i}\sqrt{3}}{2} - \frac{\vec{j}}{2}.$$

Значит,

$$\vec{l}_0 = \vec{\tau}_0 = -\frac{\vec{i}\sqrt{3}}{2} - \frac{\vec{j}}{2} \text{ и } \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\alpha = -\frac{1}{2}.$$

Вычислим частные производные функции $\varphi(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$ в точке $M_0\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial x} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial x} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{3}.$$

Подставим полученные значения частных производных и тригонометрических функций в формулу (2.1.1):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = 1\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}.$$

Упражнения.

1. Найти в начале координат производную плоскопараллельного скалярного поля $\varphi(x,y) = x^2+y^2-3x+2y$ по направлению, идущему от начала координат к точке $M(3,4)$.
2. Найти производную скалярного поля $\varphi(x,y,z) = xy^2 - xyz + z^3$ в точке $M(1,1,2)$ в направлении, образующем с осями координат углы соответственно в 60°, 45°, 60°.
3. Найти производную поля $\varphi(x,y,z) = xyz$ в точке $A(5;1;-8)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $B(9,4,4)$.
4. Найти производную скалярного поля $\varphi(M) = 2xy + 2z$ по винтовой линии l, заданной параметрически: $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 4t$ в точке M, соответствующей значению параметра $t = \frac{3\pi}{2}$.

5. Найти производную плоскопараллельного поля $\varphi = \ln(x+y)$ в точке $A(1,2)$, лежащей на параболе $y^2 = 4x$ по направлению этой параболы.

2. Градиент скалярного поля

Задание 2.2.1. Дать определение градиента скалярного поля. Объяснить связь производной скалярного поля по направлению и градиента скалярного поля. Инвариантность понятия градиента поля.

Задание 2.2.2. Сформулировать и доказать теорему о градиенте скалярного поля.

Задание 2.2.3. Сформулировать и доказать свойства градиента скалярного поля.

Задание 2.2.4. Доказать формулу о скалярном произведении вектора $grad\,\varphi$ на дифференциал радиус-вектора.

Задание 2.2.5. По заданному градиенту поля $grad\,\varphi$ определить поле $\varphi(M)$.

Пример 2.2.1. Найти градиент модуля радиус-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Решение. По определению модуля вектора $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Данный пример можно решить несколькими способами. Рассмотрим два из них.

<u>I способ</u>.

Согласно определению градиента:

$$grad\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\,. \qquad (2.2.1)$$

В нашем случае

$$\varphi = r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.$$

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Подставим значения вычисленных производных в формулу (2.2.1):

$$grad\,\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k} =$$

$$= \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{r}_0,$$

то есть получили единичный радиус-вектор.

II способ.

Согласно одному из свойств градиента:

$$grad\ F(\varphi) = \frac{\partial F}{\partial \varphi} grad\ \varphi . \qquad (2.2.2)$$

Положим

$$\varphi = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Тогда

$$F(\varphi) = r = \sqrt{\varphi} .$$

Производная функции

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}} .$$

Градиент функции φ:

$$grad\ \varphi = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} .$$

Подставим значения вычисленных производной и градиента в формулу (2.2.2):

$$grad\ F(\varphi) = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}}{2\sqrt{\varphi}} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{r}_0,$$

получили единичный радиус-вектор.

Пример 2.2.2. Найти градиент скалярного произведения радиус-вектора точки $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ на постоянный вектор $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.

Решение. Скалярное произведение $\vec{r}\vec{a}$ равно

$$\vec{r}\vec{a} = a_x x + a_y y + a_z z .$$

По формуле (2.2.1) имеем:

$$grad(\vec{r}\vec{a}) = grad(a_x x + a_y y + a_z z) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \vec{a} .$$

Пример 2.2.3. Найти градиент потенциала v электростатического поля, образованного точечным зарядом e, помещенного в начале координат

$$v = \frac{e}{r} = \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} .$$

Решение.

Согласно одному из свойств градиента:

$$grad\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right) = \frac{\varphi_2 grad\ \varphi_1 - \varphi_1 grad\ \varphi_2}{\varphi_2^2} . \qquad (2.2.3)$$

Положим

$\varphi_1 = e$;

$\varphi_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

В примере 2.1.1 мы нашли, что

$grad\ \varphi_2 = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Производная константы равна нулю, поэтому

$grad\ \varphi_1 = grad\ e = 0$.

Подставим найденные значения градиентов в формулу (2.2.3):

$$grad\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot 0 - e \cdot \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} =$$

$$= -\frac{e \cdot \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} = -\frac{e \cdot \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^3} = -\frac{e}{r^3}\vec{r}.$$

Замечание. Последний пример можно решить многими способами. Представляем Вам самостоятельно решить пример способами, которыми решался пример 2.2.1.

Упражнения.

1. Найти градиент скалярного поля $\varphi(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ в точке $M(1,2)$.
2. Показать, что функция $\varphi = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ удовлетворяет соотношению $\varphi = 2\ln 2 - \ln(grad\ \varphi)^2$, где $(grad\ \varphi)^2$ – скалярный квадрат.
3. Найти градиент скалярного поля $F(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
4. Найти наибольшую скорость изменения поля $\varphi = \ln^2\left(x^2 + y^2 + 4z\right)$ в точке $M(0,1,2)$.
5. Найти угол ψ между градиентом скалярного поля $\varphi(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M_0(3,4,12)$ и вектором $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$.
6. Вычислить с помощью градиента производную поля $\varphi(M) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{36}$ в точке $A(2,3,6)$ по направлению радиус-вектора $\vec{r}$ этой точки.

Занятие № 3. Поток векторного поля

Задание 3.1. Дать определение потока векторного поля.

Задание 3.2. Дать определение поверхностного интеграла.

Задание 3.3. Показать физический смысл потока векторного поля.

Пример 3.1. Найти поток поля радиус-вектора точки $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через прямой цилиндр радиуса R с центром в начале координат и высоты H (рис. 3.1).

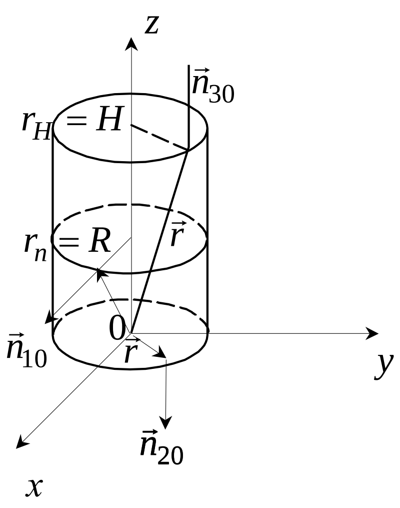

Рисунок 3.1.

Решение. Для вычисления потока вектора используем формулу

$$\Pi = \oiint_S \vec{a}d\vec{S} = \oiint_S a_n dS = \lim_{D(\Delta S_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(M_i)\Delta\vec{S}_i .$$

Согласно условию задачи поверхность S состоит из боковой поверхности и двух оснований цилиндра. Поток записывается в виде суммы поверхностных интегралов:

$$\Pi = \oiint_S r_n dS = \oiint_{S_{бок.}} r_n dS + \oiint_{S_{в.о.}} r_n dS + \oiint_{S_{н.о.}} r_n dS .$$

На боковой поверхности внешняя нормаль $\vec{n}_{10}$ параллельна плоскости xOy и проекция на нее r_n равна R, а площадь боковой поверхности цилиндра $\oiint_{S_{бок.}} dS = 2\pi RH$. Следовательно,

$$\oiint_{S_{бок.}} r_n dS = \oiint_{S_{бок.}} RdS = R\oiint_{S_{бок.}} dS =$$

$$= R \cdot 2\pi RH = 2\pi R^2 H.$$

На нижнем основании радиус-вектор $\vec{r}$ перпендикулярен нормали $\vec{n}_{20}$ и $r_n = 0$. Поэтому $\oiint_{S_{н.о.}} r_n dS = 0$. На верхнем основании нормаль $\vec{n}_{30}$ направлена относительно оси Oz вверх и $r_n = H$, а площадь основания цилиндра $\oiint_{S_{в.о.}} dS = \pi R^2$.

Следовательно,

$$\oiint_{S_{в.о.}} r_n dS = H\oiint_{S_{в.о.}} dS = H\pi R^2 .$$

Тогда поток поля радиус-вектора точки $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через прямой цилиндр радиуса R с центром в начале координат и высоты H равен:

$$\Pi = \oiint\limits_{S_{бок.}} r_n dS + \oiint\limits_{S_{в.о.}} r_n dS + \oiint\limits_{S_{н.о.}} r_n dS = 2\pi R^2 H + \pi R^2 H = 3\pi R^2 H \, .$$

Ответ. $\Pi = 3\pi R^2 H$.

Пример 3.2. Найти поток поля вектора

$$\vec{a} = (2x - y)\vec{i} + (x + y - 2z)\vec{j} + (2x + z)\vec{k}$$

через часть плоскости $x + y + z = 3$, лежащую в первом квадранте.

Решение. Найдем линию пересечения данной плоскости с координатной плоскостью xOy. Для этого положим $z = 0$. Тогда

$$x + y = 3 .$$

Линия пересечения данной плоскости с координатной плоскостью xOz ($y = 0$) задается уравнением

$$x + z = 3 ,$$

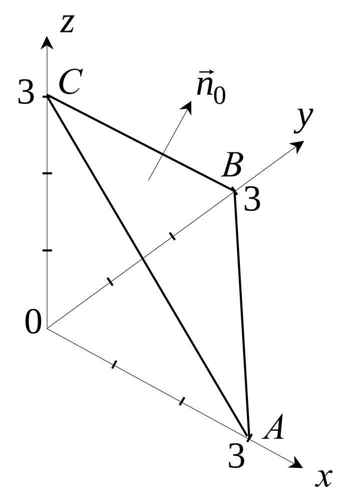

Рисунок 3.2.

а линия пересечения данной плоскости с координатной плоскостью yOz ($x = 0$) – уравнением

$$y + z = 3 .$$

Вычислим поток поля через площадь треугольника ABC (рисунок 3.2).

За положительное направление нормали $\vec{n}_0$ к плоскости треугольника примем направление от начала координат:

$$\vec{n}_0 = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma .$$

Тогда

$$d\vec{S} = \vec{n}_0 dS = \vec{i}\cos\alpha \cdot dS + \vec{j}\cos\beta \cdot dS + \vec{k}\cos\gamma \cdot dS .$$

Так как в нашем случае все направляюще косинусы положительны, имеем

$$\cos\alpha \cdot dS = dydz ; \; \cos\beta \cdot dS = dxdz ; \; \cos\gamma \cdot dS = dxdy .$$

Поэтому

$$d\vec{S} = \vec{i}\,dydz + \vec{j}dxdz + \vec{k}dxdy ,$$

$$\vec{a}d\vec{S} = (2x - y)dydz + (x + y - 2z)dxdz + (2x + z)dxdy .$$

Искомый поток поля будет состоять из трех поверхностных интегралов по площади треугольника ABC:

$$\Pi = \iint\limits_{ABC} \vec{a}d\vec{s} = \iint\limits_{ABC} (2x - y)dydz + \iint\limits_{ABC} (x + y - 2z)dxdz + \iint\limits_{ABC} (2x + z)dxdy .$$

Каждый из этих трех поверхностных интегралов заменим двойным интегралом, являющимся проекцией треугольника на соответствующую координатную плоскость.

Поверхностный интеграл $\iint\limits_{ABC}(2x-y)dydz$ отличается от двойного $\iint\limits_{OBC}(2x-y)dydz$ лишь тем, что в интеграле по OBC координата $x=0$, а в интеграле по ABC $x\neq 0$; в нем x зависит от y и z. Эта зависимость определяется уравнением плоскости треугольника: $x+y+z=3$, так что на плоскости треугольника $x=3-y-z$. Поэтому

$$\iint\limits_{ABC}(2x-y)dydz = \iint\limits_{OBC}(6-2y-2z-y)dydz =$$

$$=\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^{3-y}(6-3y-2z)dz=\int\limits_0^3\left(6z-3yz-z^2\right)\Big|_0^{3-y}dy=\frac{117}{2}.$$

Аналогично заменяются и два других поверхностных интеграла двойными:

$$\iint\limits_{ABC}(x+y-2z)dxdz = \iint\limits_{OAC}(x+3-x-z-2z)dxdz=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{3-x}(3-3z)dz=0.$$

$$\iint\limits_{ABC}(2x+z)dxdy = \iint\limits_{OAB}(2x+3-x-y)dxdy=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{3-x}(3+x-y)dz=\frac{27}{2}.$$

Отсюда

$$\Pi=\frac{117}{2}+0+\frac{27}{2}=72.$$

Ответ. $\Pi=72$.

Упражнения.

1. Найти поток поля радиуса-вектора точки $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ через поверхность прямого конуса, вершина которого в начале координат, радиуса R и высоты H.
2. Найти поток вектора $\vec{a}=(x-2z)\vec{i}+(3z-4x)\vec{j}+(5x+y)\vec{k}$ через часть плоскости $x+y+z=1$, лежащую в первом квадранте.
3. Найти поток векторного поля $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$ через поверхность пирамиды с вершиной в точке $S(0,0,2)$ и основанием OAB, где $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$.
4. Найти поток векторного поля $\vec{a}=(2x-3y)\vec{i}+(3xy-z)\vec{j}+4xz\vec{k}$ через поверхность пирамиды, ограниченную плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+2z-4=0$.
5. Вычислить поток векторного поля $\vec{a}=\frac{1}{3}x\vec{i}+\left(z^2-x^2\right)\vec{j}+\frac{2}{3}z\vec{k}$ через полную поверхность цилиндра: $x^2+y^2=5$; $z=0$; $z=1$.

Занятие № 4. Дивергенция векторного поля. Теорема Гаусса-Остроградского

1. Дивергенция векторного поля

Задание 4.1.1. Дать определение и физический смысл дивергенции векторного поля.

Задание 4.1.2. Сформулировать и доказать теорему о дивергенции векторного поля.

Пример 4.1.1. Найти дивергенцию поля $\vec{a} = r^2\vec{c}$, где $\vec{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ – постоянный вектор.

Решение.

I способ (по теореме о дивергенции).

$$\vec{a} = r^2\vec{c} = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\left(c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}\right),$$

$$\vec{a} = c_1\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\vec{i} + c_2\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\vec{j} + c_3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\vec{k}.$$

Следовательно,

$$a_x = c_1\left(x^2 + y^2 + z^2\right),$$

$$a_y = c_2\left(x^2 + y^2 + z^2\right),$$

$$a_z = c_3\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Тогда по теореме о дивергенции

$$div\,\vec{a}(M) = \frac{\partial a_x(M)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(M)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(M)}{\partial z} = 2c_1x + 2c_2y + 2c_3z =$$

$$= 2(c_1x + c_2y + c_3z).$$

II способ (по свойствам дивергенции).

$$div\,r^2\vec{c} = r^2 div\,\vec{c} + \vec{c}\,grad\,r^2 = r^2 \cdot 0 + \vec{c}\left(2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}\right) =$$

$$= 2(c_1x + c_2y + c_3z).$$

Упражнения.

1. Найти дивергенцию поля $\vec{a} = c\vec{r}$, где c – постоянный скаляр.
2. Найти дивергенцию поля $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ в точке $M(1,2,3)$.
3. Найти дивергенцию поля $\vec{a} = \frac{\vec{r}}{r}$, где $\vec{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
4. Найти дивергенцию поля $\vec{a} = r^4\vec{r}$, где $\vec{r} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
5. Найти дивергенцию поля линейных скоростей $\vec{v}$ частиц жидкости, вращающейся вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью ω: $\vec{v} = \omega\left(-y\vec{i} + x\vec{j}\right)$.
6. Найти дивергенцию поля $\vec{a} = \frac{x + y + z}{xyz}\vec{r}$.

2. Теорема Гаусса-Остроградского.

Задание 4.2.1. Сформулировать и доказать теорему о дивергенции векторного поля.

Пример 4.2.1. Найти поток вектора $\vec{a}$ через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V, если дивергенция вектора $\vec{a}$ во всех точках поля есть постоянная величина c.

Решение.

По теореме Гаусса-Остроградского имеем:

$$\Pi = \iiint\limits_V div\vec{a}dV = c\iiint\limits_V dV = cV.$$

Пример 4.2.2. Вычислить поток поля вектора $\vec{a} = x^3\vec{i} + 3yz^2\vec{j} + 3zy^2\vec{k}$ через поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Решение.

Найдем дивергенцию вектора $\vec{a}$:

$$div\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(3yz^3\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(3zy^3\right) = 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

Согласно теореме Гаусса-Остроградского

$$\Pi = \iiint\limits_V div\vec{a}dV = 3\iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dxdydz.$$

Перейдем к сферическим координатам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\Theta; \\ y = \rho\sin\varphi\sin\Theta; \\ z = \rho\cos\Theta. \end{cases}$$

$$dV = dxdydz = \rho^2\sin\Theta d\rho d\varphi d\Theta;\ x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2.$$

$$\Pi = 3\iiint\limits_V \rho^4\sin\Theta d\rho d\varphi d\Theta = 3\int\limits_0^R \rho^4 d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\Theta d\Theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{12}{5}\pi R^5.$$

Упражнения.

1. Найти поток вектора $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ через полную поверхность пирамиды, ограниченную плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$ $(a > 0)$.
2. Найти поток вектора $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ через полную поверхность пирамиды с вершинами в точках $C(0,0,2)$, $O(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$.
3. Найти поток поля вектора $\vec{a}$ через поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $\vec{a} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z\vec{k}$.

4. Найти поток поля вектора $\vec{a} = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z\vec{k}$ через замкнутую поверхность, образованную плоскостями: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и частью поверхности параболоида $4 - z = x^2 + y^2$, лежащую в первом октанте.

Занятие № 5. Криволинейный интеграл от вектора. Циркуляция вектора. Вихрь поля.

1. Криволинейный интеграл от вектора. Циркуляция вектора

Задание 5.1.1. Дать определения криволинейного интеграла от вектора и циркуляции вектора.

Задание 5.1.2. Физический смысл циркуляции вектора.

Пример 5.1.1. Найти линейный интеграл вектора $\vec{a} = x^3\vec{i} - y^3\vec{j}$ по верхней половине окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ (Рисунок 5.1.1).

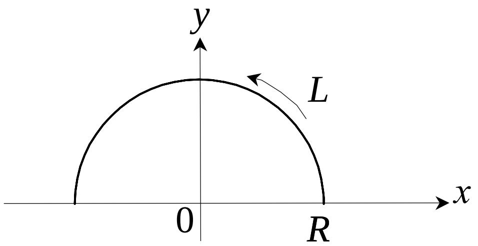

Рисунок 5.1.1.

Решение.

Уравнение окружности в векторной форме:

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = R\cos t\vec{i} + R\sin t\vec{j}$.

Вектор $\vec{a}$ на этой окружности запишется так:

$\vec{a} = R^3\cos^3 t\cdot\vec{i} - R^3\sin^3 t\cdot\vec{j}$.

Тогда

$d\vec{r} = -R\sin t dt\vec{i} + R\cos t dt\vec{j}$.

Скалярное произведение

$$\vec{a}d\vec{r} = -R^4\cos^3 t\sin t dt - R^4\sin^3 t\cos t dt = -R^4\sin t\cos t\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{2}R^4\sin 2t dt.$$

При движении по дуге в направлении против часовой стрелки параметр t изменяется от 0 до π. Поэтому линейный интеграл по дуге окружности будет равен:

$$\int\limits_L \vec{a}d\vec{r} = -\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{2}R^4\sin 2t dt = \frac{1}{2}R^4\cos 2t\Big|_0^{\pi} = 0.$$

Пример 5.1.2. Вычислить циркуляцию поля вектора $\vec{a} = y\vec{i}$ по контуру окружности $x^2 + (y-b)^2 = b^2$ (Рисунок 5.1.2).

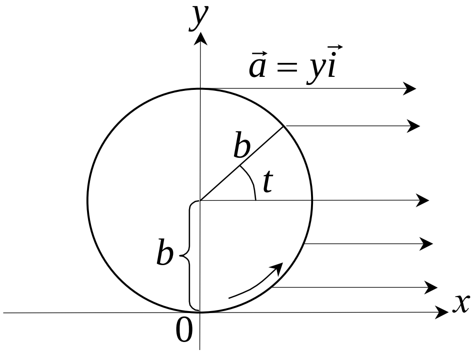

Рисунок 5.1.2.

Решение.

Для облегчения решения задачи запишем уравнение окружности в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = b\cos t; \\ y = b + b\sin t. \end{cases}$$

Угол t при положительном обходе окружности изменяется от 0 до 2π.

$a_x = y$, $a_y = 0$, $a_z = 0$.

Циркуляция поля равна

$$\Gamma = \oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz = -\int_0^{2\pi} (b + b\sin t) b \sin t dt = -\pi b^2.$$

Знак минус указывает на то, что под действием сил $\vec{a} = y\vec{i}$ окружность будет вращаться в отрицательном направлении, то есть по часовой стрелке.

Упражнения.

1. Найти линейный интеграл вектора $\vec{a} = -(x\vec{i} + y\vec{j})$ по дуге эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей в первом квадранте (перейти к уравнению эллипса в параметрическом виде).
2. Найти циркуляцию вектора $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j}$ вдоль замкнутой кривой, образованной осями координат и дугой астроиды $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$, лежащей в первом квадранте (перейти к уравнению астроиды в параметрическом виде: $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$).
3. Найти циркуляцию поля вектора $\vec{a} = (x^3 + y)\vec{i} + (y^3 + x)\vec{j}$ по окружности $x^2 + y^2 = R^2$.
4. Найти циркуляцию поля радиуса-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ по линии $ABOA$, где AB – винтовая линия: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$; A и B – точки, соответствующие значениям параметра $t = 0$ и $t = 2\pi$; O – начало координат; BO и OA – отрезки прямых линий.
5. Найти работу A векторного поля $F = x\vec{i} + y\vec{j} + (x + y - 1)\vec{k}$ по отрезку прямой AB, где $A(1,1,1)$ и $B(2,3,4)$.
6. Найти работу векторного поля $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ по контуру $ABCA$, получаемому при пересечении поверхности $x^2 + y + z = 4$ с координатными плоскостями.
7. Векторное поле образовано погонной силой (то есть силой, отнесенной к единице длины). $\vec{F} = (2a - y)\vec{i} + (y - a)\vec{j}$. Найти вращательную способность поля на замкнутом контуре, состоящем из первой арки циклоиды

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, и отрезком оси Ox, отсекаемым дугой циклоиды.

8. Векторное поле образовано погонной силой $\vec{F} = (x - 2z)\vec{i} + (x + 3y + z)\vec{j} + (5x + y)\vec{k}$. Найти вращательную способность поля на контуре треугольника $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.

2. Вихрь поля

Задание 5.2.1. Дать определения вихря поля.

Задание 5.2.2. Доказать теорему о вихре поля.

Пример 5.2.1. Найти вихрь поля вектора $\vec{a} = x^3 y\vec{i} + y^3 z\vec{j} + z^3 x\vec{k}$.

Решение.

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^3 y & y^3 z & z^3 x \end{vmatrix} = -y^3\vec{i} - z^3\vec{j} - x^3\vec{k}.$$

Упражнения.

1. Найти вихрь поля вектора а) $\vec{a} = xy^3z^4(\vec{i} - 3\vec{j})$; б) $\vec{a} = x^2y^5(\vec{i} - 4\vec{k})$; в) $\vec{a} = x^2yz^3(\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k})$.

Занятие № 6. Теорема Стокса.

Задание 6.1. Сформулировать и доказать теорему Стокса.

Пример 6.1. Вычислить циркуляцию поля вектора $\vec{a} = y\vec{i} - x^2\vec{j} + z^3\vec{k}$ по линии пересечения поверхности $z^2 = 6 - x - y$ с координатными плоскостями в положительном направлении.

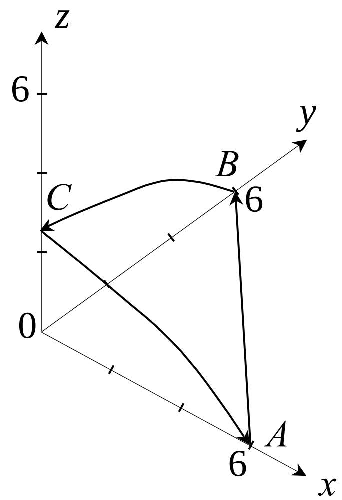

Рисунок 6.1.

Решение.

Полагая последовательно $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, находим линии пересечения поверхности с координатными плоскостями соответственно: xOy – по прямой $x + y = 6$; xOz – по параболе $z^2 = 6 - x$; yOz – по параболе $z^2 = 6 - x$ (рисунок 6.1). На чертеже указано направление положительного обхода контура $ABCA$. Вычислим циркуляцию поля при помощи теоремы Стокса.

Согласно теореме Стокса:

Циркуляция поля $\vec{a}(M)$ по контуру L *равна потоку вихря поля через любую поверхность S, лежащую в векторном поле и имеющую своей границей контур L:*

$$\oint\limits_L \vec{a}d\vec{r} = \iint\limits_S rot\,\vec{a}\,d\vec{S}\,.$$

При этом предполагается, что на поверхности S все частные производные первого порядка от функций a_x, a_y, a_z непрерывны.

Вычислим вихрь вектора $\vec{a}$:

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x^2 & z^3 \end{vmatrix} = (-2x-1)\vec{k}\,.$$

В качестве поверхности S возьмем боковую поверхность пирамиды $OABC$: $S = S_{OCA} + S_{OAB} + S_{OBC}$. Применяя теорему Стокса, получим:

$$\Gamma = \oint\limits_{ABCA} \vec{a}d\vec{r} = \iint\limits_{S_{OCA}} rot\vec{a}d\vec{S} + \iint\limits_{S_{OAB}} rot\vec{a}d\vec{S} + \iint\limits_{S_{OBC}} rot\vec{a}d\vec{S}\,.$$

На грани OAC вектор $d\vec{S} = dxdz\,\vec{j}$, поэтому

$$rot\,\vec{a}d\vec{S} = 0 \text{ и } \iint\limits_{S_{OCA}} rot\vec{a}d\vec{S} = 0\,.$$

На грани OAB вектор $d\vec{S} = dxdz\vec{k}$, поэтому

$$\iint\limits_{S_{OAB}} rot\vec{a}d\vec{S} = -\iint\limits_{S_{OAB}} (2x+1)dxdy = -\int\limits_6^0 dx \int\limits_0^{6-x} (2x+1)dy =$$

$$= \int\limits_0^6 (2x+1)dx \int\limits_0^{6-x} dy = \int\limits_0^6 (2x+1)(6-x)dx = \int\limits_0^6 \left(-2x^2 + 11x + 6\right)dx =$$

$$= -\frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x\Big|_0^6 = -144 + 198 + 36 = 90.$$

На грани OCB вектор $d\vec{S} = dydz\,\vec{i}$, поэтому

$$rot\,\vec{a}d\vec{S} = 0 \text{ и } \iint\limits_{S_{OCB}} rot\vec{a}d\vec{S} = 0\,.$$

Окончательно получим

$$\Gamma = \oint\limits_{ABCA} \vec{a}d\vec{r} = \iint\limits_{S_{OCA}} rot\vec{a}d\vec{S} + \iint\limits_{S_{OAB}} rot\vec{a}d\vec{S} + \iint\limits_{S_{OBC}} rot\vec{a}d\vec{S} = 90\,.$$

Упражнения.

1. Используя теорему Стокса, найти циркуляцию поля вектора $\vec{a} = (y-x)\vec{i} + (2x-y)\vec{j}$ по контуру L, состоящему из координатных осей и дуги окружности $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, соответствующей параметру $0 \le t \le 2\pi$.
2. Найти линейный интеграл вектора $\vec{a} = -\left(x\vec{i} + y\vec{j}\right)$ по дуге эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей в первом квадранте, используя теорему Стокса.

3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}=(x-2z)\vec{i}+(x+3y+z)\vec{j}+(5x+y)\vec{k}$ по контуру треугольника ABC, где $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.
4. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}=y^2\vec{i}-x^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ по контуру пересечения координатных плоскостей с поверхностью $x^2=4-y-z$.

Занятие № 7. Соленоидальное и потенциальное поля

1. Соленоидальное поле

Задание 7.1.1. Дать определение соленоидального поля.

Задание 7.1.2. Физический смысл соленоидального поля.

Пример 7.1.1. Покажем, что поле напряженности магнитного поля, образованного электрическим током, текущим по бесконечному прямолинейному проводу, соленоидально всюду, за исключением начала координат.

Решение.

Вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$ определяется формулой

$$H=2J\cdot\frac{\left(-y\vec{i}+x\vec{j}\right)}{x^2+y^2}.$$

Вычислим дивергенцию $\vec{H}$ по формуле

$$div\,\vec{H}=2J\cdot\frac{2yx-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0.$$

Отсюда видно, что поле $\vec{H}$ всюду соленоидально, за исключением начала координат, где оно вообще не определено. Векторными линиями поля $\vec{H}$, как известно из физики, являются концентрические окружности, центр которых на проводе, то есть замкнутые линии.

Упражнения.

1. Будут ли векторные поля следующих векторов соленоидальными?
   а) $\vec{a}=(4x-3yz)\vec{i}+\left(2y^2-3xz\right)\vec{k}+z^3\vec{i}$;
   б) $\vec{a}=\left(6x^2-y^2z^3\right)\vec{i}+\left(3x^2z-2xy\right)\vec{j}+7x^2y^3\vec{k}$.

2. Потенциальное поле

Задание 7.2.1. Дать определение потенциального поля.

Задание 7.2.2. Сформулировать и доказать признак потенциальности поля.

Задание 7.2.3. Сформулировать и доказать свойства потенциального поля.

Пример 7.2.1. Будет ли поле вектора $\vec{a}$ потенциально? В случае потенциальности поля найти потенциальную функцию φ.

$$\vec{a}=(4x-3yz)\vec{i}+(4y-3xz)\vec{j}+(4z-3xy)\vec{k}.$$

Решение.

Найдем вихрь данного поля:

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 4x-3yz & 4y-3xz & 4z-3xy \end{vmatrix} = \vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(4z-3xy)-\frac{\partial}{\partial z}(4y-3xz)\right]+$$

$$+\vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(4x-3yz)-\frac{\partial}{\partial x}(4z-3xy)\right]+\vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(4y-3xz)-\frac{\partial}{\partial y}(4x-3yz)\right]=$$

$$=(-3x+3x)\vec{i}+(-3y+3y)\vec{j}+(-3z+3z)\vec{k}=0,$$

следовательно, поле потенциально.

Найдем теперь его потенциальную функцию $\varphi(M)=\varphi(x,y,z)$:

$$\varphi(M)=\varphi(x,y,z)=\int\limits_{M_0}^{M}\vec{a}d\vec{r}=\int\limits_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{M(x,y,z)}a_x dx+a_y dy+a_z dz\,.$$

В качестве начальной точки M_0 выберем начало координат. Согласно третьему свойству потенциального поля *криволинейный интеграл в потенциальном поле не зависит от пути интегрирования*. Для практического вычисления функции φ удобнее всего брать в качестве пути M_0M ломаную $M_0M_1M_2M$, изображенную на рисунке 7.1.

$$\varphi(x,y,z)=\int\limits_{M_0}^{M_1}\vec{a}d\vec{r}+\int\limits_{M_1}^{M_2}\vec{a}d\vec{r}+\int\limits_{M_2}^{M}\vec{a}d\vec{r}\,.$$

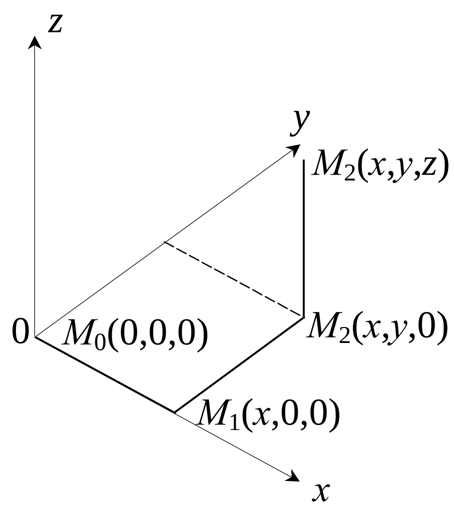

Рисунок 7.1.

Вычислим отдельно каждый из этих интегралов.

1) $$\int\limits_{M_0}^{M_1}\vec{a}d\vec{r}=\int\limits_{M_0}^{M_1}a_x dx+a_y dy+a_z dz\,.$$

На отрезке M_0M_1 x меняется от 0 до значения x точки M_1, $y=0$, $z=0$, значит $dy=dz=0$ и

$$\int\limits_{M_0}^{M_1}\vec{a}d\vec{r}=\int\limits_{0}^{x}4xdx=2x^2\,.$$

2) На отрезке M_1M_2 меняется только y от 0 до y, x постоянен, $z=0$, поэтому $dx=dz=0$ и

$$\int\limits_{M_1}^{M_2}\vec{a}d\vec{r}=\int\limits_{0}^{y}4ydy=4\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^y=2y^2\,.$$

3) На отрезке M_2M меняется только z от 0 до z, x и y постоянны, поэтому $dx = dy = 0$ и

$$\int_{M_2}^{M} \vec{a}d\vec{r} = \int_{0}^{z} (4z - 3xy)dz = \left(2z^2 - 3xyz\right)\Big|_0^z = 2z^2 - 3xyz .$$

Следовательно, потенциальная функция

$\varphi(M) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3xyz$.

Упражнения.

1. Будут ли поле вектора $\vec{a}$ потенциально? В случае потенциальности поля найти потенциальную функцию $\varphi(x, y, z)$.

   а) $\vec{a} = \left(3x^2 + 2y^2\right)\vec{i} - 4xy\vec{j} + 6z^2\vec{k}$;

   б) $\vec{a} = (6x - yz)\vec{i} - xz\vec{j} + (10z - xy)\vec{k}$.

Занятие № 8. Контроль знаний

Задания выполняются в течение 1 пары в аудитории.

1. Вариант

1. Найти векторные линии однородного поля $\vec{A}(P) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$, где a, b и c – постоянные (Ответ. Прямые, параллельные вектору $A(a, b, c)$: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$).

2. Вычислить $div\vec{b}(\vec{r}\vec{a})$ и $div\vec{r}(\vec{r}\vec{a})$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – постоянные векторы (Ответ. $div\vec{b}(\vec{r}\vec{a}) = (\vec{a}\vec{b})$, $div\vec{r}(\vec{r}\vec{a}) = 4(\vec{r}\vec{a})$).

3. Доказать, что $rot\left[\vec{A}_1(P) + \vec{A}_2(P)\right] = rot\,\vec{A}_1(P) + rot\,\vec{A}_2(P)$.

4. Вычислить поток и циркуляцию постоянного вектора $\vec{A}$ вдоль произвольной замкнутой кривой L (И поток, и циркуляция равны 0).

2. Вариант

1. Найти векторные линии плоского поля $\vec{A}(P) = -\omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$, где ω – постоянная (Ответ. Окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$).

2. Вычислить $div(\vec{a} \times \vec{r})$, где $\vec{a}$ – постоянный вектор (Ответ. 0).

3. Доказать соотношение $\vec{n}\left(grad\left(\vec{A}\vec{n}\right) - rot\left(\vec{A} \times \vec{n}\right)\right) = div\,\vec{A}$.

4. Вычислить поток и циркуляцию вектора $\vec{A}(P) = a\vec{r}$, где a – постоянный скаляр, а $\vec{r}$ – радиус-вектор точки P вдоль произвольной замкнутой кривой L (Поток равен $2aS$, где S – площадь области, ограниченной контуром L, циркуляция равна 0).

Занятие № 9. Решение задач, повторение

1. Дана функция $u = xe^y$ и точки $M_1(1,1,2)$ и $M_2(3,2,1)$. Вычислить: 1) Производную функции $u = u(x, y, z)$ в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $grad\, u(M_1)$.

   Решение.

   1) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^y$;

   $\dfrac{\partial u}{\partial y} = xe^y$;

   $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$;

   $\dfrac{\partial u}{\partial x}(M_1) = e$;

   $\dfrac{\partial u}{\partial y}(M_1) = e$;

   $\dfrac{\partial u}{\partial z}(M_1) = 0$;

   единичный вектор $\vec{l}_0$ направления $\overrightarrow{M_1M_2}$:

   $$\frac{(3-1)\vec{i} + (2-1)\vec{j} + (1-2)\vec{k}}{\sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2 + (1-2)^2}} = \frac{2\vec{i}}{\sqrt{6}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{6}} - \frac{\vec{k}}{\sqrt{6}},$$

   отсюда получаем:

   $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$; $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$; $\cos\gamma = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

   $$\frac{\partial u(M_1)}{\partial \overrightarrow{M_1M_2}} = \frac{\partial u(M_1)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_1)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_1)}{\partial z}\cos\gamma =$$

   $$= \frac{2e}{\sqrt{6}} + \frac{e}{\sqrt{6}} = \frac{3e}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}\cdot e}{2}.$$

   2) $$grad\, u(M_1) = \frac{\partial u(M_1)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(M_1)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(M_1)}{\partial z}\vec{k} = \frac{2e}{\sqrt{6}}\vec{i} + \frac{e}{\sqrt{6}}\vec{j}.$$

2. Даны векторное поле $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ и плоскость p: $x + y + z - 1 = 0$, которая совместно с координатными плоскостями образует пирамиду V. Пусть σ – основание пирамиды, принадлежащее плоскости p; λ – контур, ограничивающий σ, $\vec{n}$ – нормаль к σ, направленная вне пирамиды V. Требуется вычислить: 1) поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхность σ в направлении нормали $\vec{n}$; 2) циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру λ непосредственно и применив теорему Стокса к контуру λ и ограниченной

им поверхностью σ с нормалью $\vec{n}$; 3) поток векторного поля $\vec{F}$ через полную поверхность пирамиды V в направлении внешней нормали к ее поверхности непосредственно и применив теорему Гаусса-Остроградского. Сделать чертеж.

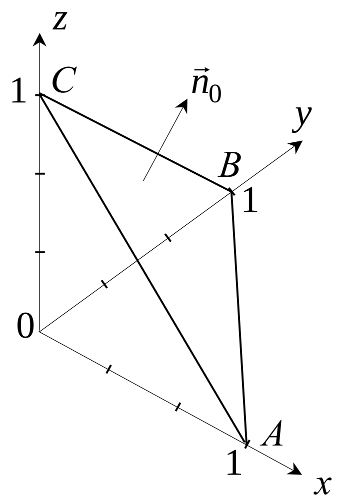

Рисунок 9.1.

Решение.

1) Найдем линию пересечения данной плоскости с координатной плоскостью xOy.

Для этого положим $z=0$. Тогда

$x+y=1.$

Линия пересечения данной плоскости с координатной плоскостью xOz ($y=0$) задается уравнением

$x+z=1,$

а линия пересечения данной плоскости с координатной плоскостью yOz ($x=0$) – уравнением

$y+z=1.$

Вычислим поток поля через площадь треугольника ABC (рисунок 3.2).

За положительное направление нормали $\vec{n}$ к плоскости треугольника примем направление от начала координат:

$$\vec{n}=\vec{i}\cos\alpha+\vec{j}\cos\beta+\vec{k}\cos\gamma.$$

Тогда

$$d\vec{S}=\vec{n}dS=\vec{i}\cos\alpha\cdot dS+\vec{j}\cos\beta\cdot dS+\vec{k}\cos\gamma\cdot dS.$$

Так как в нашем случае все направляюще косинусы положительны, имеем

$$\cos\alpha\cdot dS=dydz;\ \cos\beta\cdot dS=dxdz;\ \cos\gamma\cdot dS=dxdy.$$

Поэтому

$$d\vec{S}=\vec{i}\,dydz+\vec{j}dxdz+\vec{k}dxdy,$$

$$\vec{F}d\vec{S}=xdydz+ydxdz+zdxdy.$$

Искомый поток поля будет состоять из трех поверхностных интегралов по площади треугольника ABC:

$$\Pi=\iint\limits_{ABC}\vec{F}d\vec{s}=\iint\limits_{ABC}xdydz+\iint\limits_{ABC}ydxdz+\iint\limits_{ABC}zdxdy.$$

Каждый из этих трех поверхностных интегралов заменим двойным интегралом, являющимся проекцией треугольника на соответствующую координатную плоскость.

$$\iint\limits_{ABC} xdydz = \iint\limits_{OBC} (1-y-z)dydz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} (1-y-z)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(z - yz - \frac{1}{2}z^2 \right)\Bigg|_0^{1-y} dy = \int\limits_0^1 \left(1 - y - y(1-y) - \frac{1}{2}(1-y)^2 \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} - y + \frac{1}{2}y^2 \right) dy = \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}y^3 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}$$

Аналогично заменяются и два других поверхностных интеграла двойными:

$$\iint\limits_{ABC} (1-x-z)dxdz = \frac{1}{6}.$$

$$\iint\limits_{ABC} (1-x-y)dxdy = \frac{1}{6}.$$

Отсюда $\Pi = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

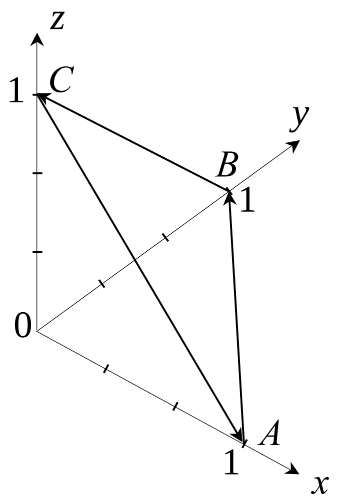

Рисунок 9.2.

2) $\Gamma = \int\limits_{\lambda} \vec{F}d\vec{r} = \int\limits_{AB} \vec{F}d\vec{r} + \int\limits_{BC} \vec{F}d\vec{r} + \int\limits_{CA} \vec{F}d\vec{r}$

На AB $y = 1 - x,\ z = 0$, $\vec{u} = x\vec{i} + (1-x)\vec{j}$,
$\vec{r} = x\vec{i} + (1-x)\vec{j}$, $d\vec{r} = \vec{i}\,dx - \vec{j}dx$,
$\vec{u}d\vec{r} = xdx - (1-x)dx = (2x-1)dx$.

$$\int\limits_{AB} \vec{F}d\vec{r} = \int\limits_1^0 (2x-1)dx = x^2 - x\Big|_1^0 = 0.$$

Аналогично, $\int\limits_{BC} \vec{F}d\vec{r} = 0$, $\int\limits_{CA} \vec{u}d\vec{r} = 0$.

Тогда

$\Gamma = 0 + 0 + 0 = 0$.

По теореме Стокса

$$\oint\limits_{\lambda} \vec{F}d\vec{r} = \iint\limits_{\sigma} rot\,\vec{F}\,d\vec{S}$$

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

$\Gamma = 0$.

3) $\Pi = \Pi_{ABC} + \Pi_{AOB} + \Pi_{AOC} + \Pi_{BOC}$

$\Pi_{ABC} = \frac{1}{2}$ (см. 1)).

$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{n}_{AOB} = -\vec{k}$.

$d\vec{S} = -\vec{k}dS$

$\vec{F}d\vec{S} = zdxdy = 0$, т.к. на AOB $z = 0$,

$\Pi_{AOB} = 0$.

Аналогично,

$\Pi_{AOC} = 0$, $\Pi_{BOC} = 0$.

$\Pi = \dfrac{1}{2} + 0 + 0 + 0 = \dfrac{1}{2}$.

По теореме Остроградского-Гаусса

$\Pi = \oiint\limits_V \vec{F}d\vec{S} = \iiint\limits_V div\,\vec{F}\,dV$.

$div\,\vec{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$.

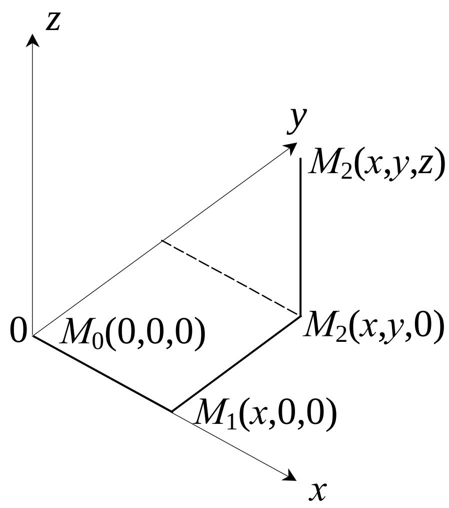

Рисунок 9.3.

$$\Pi = \oiint\limits_V \vec{F}d\vec{S} = \iiint\limits_V div\,\vec{F}\,dV = \iiint\limits_V 3dV = 3\iiint\limits_V dV = 3\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz =$$

$$= 3\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y)dy = 3\int_0^1 \left(1 - x - x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2 \right) dx =$$

$$= 3\int_0^1 \left((1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2 \right) dx = -3\left(\frac{1}{3}(1-x)^3 - \frac{1}{6}(1-x)^3 \right)\Bigg|_0^1 = 3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2}.$$

3. Проверить, является ли векторное поле $\vec{F} = (6x - 7yz)\vec{i} + (6y - 7xz)\vec{j} + (6z - 7xy)\vec{k}$ потенциальным и соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{F}$ найти его потенциал.

Решение.

Найдем вихрь данного поля:

$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 6x - 7yz & 6y - 7xz & 6z - 7xy \end{vmatrix} = \vec{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(6z - 7xy) - \frac{\partial}{\partial z}(6y - 7xz) \right] +$$

$$+ \vec{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(6x - 7yz) - \frac{\partial}{\partial x}(6z - 7xy) \right] + \vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(6y - 7xz) - \frac{\partial}{\partial y}(6x - 7yz) \right] =$$

$$= (-7x + 7x)\vec{i} + (-7y + 7y)\vec{j} + (-7z + 7z)\vec{k} = 0,$$

следовательно, поле потенциально.

Найдем теперь его потенциальную функцию $\varphi(M) = \varphi(x, y, z)$:

$$\varphi(M)=\varphi(x,y,z)=\int\limits_{M_0}^{M}\vec{a}d\vec{r}=$$

$$=\int\limits_{M_0(x_0,y_0,z_0)}^{M(x,y,z)} a_x dx+a_y dy+a_z dz.$$

В качестве начальной точки M_0 выберем начало координат. Согласно третьему свойству потенциального поля *криволинейный интеграл в потенциальном поле не зависит от пути интегрирования*. Для практического вычисления функции φ удобнее всего брать в качестве пути M_0M ломаную $M_0M_1M_2M$, изображенную на рисунке 7.1.

$$\varphi(x,y,z)=\int\limits_{M_0}^{M_1}\vec{a}d\vec{r}+\int\limits_{M_1}^{M_2}\vec{a}d\vec{r}+\int\limits_{M_2}^{M}\vec{a}d\vec{r}.$$

Вычислим отдельно каждый из этих интегралов.

1) $\displaystyle\int\limits_{M_0}^{M_1}\vec{F}d\vec{r}=\int\limits_{M_0}^{M_1}F_x dx+F_y dy+F_z dz.$

На отрезке M_0M_1 x меняется от 0 до значения x точки M_1, $y=0$, $z=0$, значит $dy=dz=0$ и

$$\int\limits_{M_0}^{M_1}\vec{F}d\vec{r}=\int\limits_{0}^{x}6xdx=3x^2.$$

2) На отрезке M_1M_2 меняется только y от 0 до y, x постоянен, $z=0$, поэтому $dx=dz=0$ и

$$\int\limits_{M_1}^{M_2}\vec{F}d\vec{r}=\int\limits_{0}^{y}6ydy=6\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^y=3y^2.$$

3) На отрезке M_2M меняется только z от 0 до z, x и y постоянны, поэтому $dx=dy=0$ и

$$\int\limits_{M_2}^{M}\vec{F}d\vec{r}=\int\limits_{0}^{z}(6z-7xy)dz=\left(3z^2-7xyz\right)\Big|_0^z=3z^2-7xyz.$$

Следовательно, потенциальная функция

$$\varphi(M)=3x^2+3y^2+3z^2-7xyz,$$

а потенциал:

$$\varphi_1(M)=-\varphi(M)=7xyz-3x^2-3y^2-3z^2.$$

Проверим, является ли поле $\vec{F}=(6x-7yz)\vec{i}+(6y-7xz)\vec{j}+(6z-7xy)\vec{k}$ соленоидальным.

$$div\,\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=6+6+6=18\neq 0,$$

следовательно, данное поле не соленоидально.

1. Вычислить поток вектора $\bar{f} = x\bar{i} - 3xy\bar{j} + z\bar{k}$ через поверхность $3x - 5y + 2z = 10$, $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$.

Решение.

$$D_{ABC} = \iint\limits_S \vec{F}\vec{n}ds = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{10}{3}} dx \int\limits_{\frac{3x-10}{5}}^{0} (5y + 15xy + 10)dy = -\frac{25}{9},$$

$$\vec{n} = \frac{3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{38}},\ ds = \frac{dxdy}{\cos\gamma},\ \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{38}}.$$

$$D_{AOC} = 0,$$

$$D_{BOC} = 0,$$

$$D_{AOB} = 0,$$

$$\Pi = \iiint\limits_V (2 - 3x)dxdydz = \int\limits_0^{\frac{10}{3}} dx \int\limits_{-\frac{10-3x}{5}}^{0} dy \int\limits_0^{\frac{10-3x+5y}{2}} (2 - 3x)dz = -\frac{25}{9}.$$

Задание для типового расчета

1. Дана функция $u = u(x, y, z)$ и точки M_1 и M_2. Вычислить: 1) Производную функции $u = u(x, y, z)$ в точке M_1 по направлению вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$; 2) $grad\, u(M_1)$.

1.1. $u = e^{x-yz}$, $M_1(1,0,3)$, $M_2(2,-4,5)$.

1.2. $u = \dfrac{10}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$, $M_1(1,2,-1)$, $M_2(2,0,1)$.

1.3. $u = e^{xy+z^2}$, $M_1(-5,0,2)$, $M_2(2,4,-3)$.

1.4. $u = x^2 + 2y^2 - 4z^5 - 5$, $M_1(1,2,1)$, $M_2(-3,-2,6)$.

1.5. $u = 5x^2yz - xy^2z + z^2y$, $M_1(1,1,1)$, $M_2(9,-3,9)$.

1.6. $u = \ln(xy + yz + xz)$, $M_1(-2,3,-1)$, $M_2(3,2,1)$.

1.7. $u = x^2y + y^2z + z^2x$, $M_1(1,-1,2)$, $M_2(3,4,-1)$.

1.8. $u = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$, $M_1(1,1,1)$, $M_2(3,2,1)$.

1.9. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$, $M_1(1,2,2)$, $M_2(-3,2,-1)$.

1.10. $u = \ln\left(x^3 + y^3 + z + 1\right)$, $M_1(1,3,0)$, $M_2(-4,1,3)$.

1.11. $u = x^{yz}$, $M_1(3,1,4)$, $M_2(1,-1,-1)$.

1.12. $u = \ln\left(x^2 - y^2 + z^2 + 1\right)$, $M_1(1,1,1)$, $M_2(5,-4,8)$.

1.13. $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} - \dfrac{z}{x}$, $M_1(2,2,2)$, $M_2(-3,4,1)$.

1.14. $u = x^2y + y^2z - 3z$, $M_1(0,-2,-1)$, $M_2(12,-5,0)$.

1.15. $u = 3x^2yz^3$, $M_1(-2,-3,1)$, $M_2(5,-2,0)$.

1.16. $u = \ln\left(1 + x + y^2 + z^2\right)$, $M_1(1,1,1)$, $M_2(3,-5,1)$.

1.17. $u = 3xy^2 + z^2 - xyz$, $M_1(1,1,2)$, $M_2(3,-1,4)$.

1.18. $u = ze^{x^2+y^2+z^2}$, $M_1(0,0,0)$, $M_2(3,-4,2)$.

1.19. $u = 5xy^3z^2$, $M_1(2,1,-1)$, $M_2(4,-3,0)$.

1.20. $u = x^2y + z^2x - 2$, $M_1(1,1,-1)$, $M_2(2,-1,3)$.

1.21. $u = zy^2 - 2xz + z^2$, $M_1(3,1,-1)$, $M_2(-2,1,4)$.

1.22. $u = x - 2y + e^z$, $M_1(-4,-5,0)$, $M_2(2,3,4)$.

1.23. $u = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3$, $M_1(1,2,-1)$, $M_2(0,-1,3)$.

1.24. $u=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}-\frac{z}{x}$, $M_1(-1,1,1)$, $M_2(2,3,4)$.

1.25. $u=x^3+xy^2-6xyz$, $M_1(-1,1,1)$, $M_2(2,3,4)$.

1.26. $u=(x-y)^z$, $M_1(1,5,0)$, $M_2(3,7,-2)$.

1.27. $u=x^y-3xyz$, $M_1(2,2,-4)$, $M_2(1,0,-3)$.

1.28. $u=x^2+y^2+z^2-2xyz$, $M_1(1,-1,2)$, $M_2(5,-1,4)$.

1.29. $u=xe^y+ye^x-z^2$, $M_1(3,0,2)$, $M_2(4,1,3)$.

1.30. $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$, $M_1(-1,2,1)$, $M_2(3,1,-1)$.

2. Даны векторное поле $\vec{F}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$ и плоскость p: $Ax+By+Cz+D=0$, которая совместно с координатными плоскостями образует пирамиду V. Пусть σ – основание пирамиды, принадлежащее плоскости p; λ – контур, ограничивающий σ, $\vec{n}$ – нормаль к σ, направленная вне пирамиды V. Требуется вычислить: 1) поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхность σ в направлении нормали $\vec{n}$; 2) циркуляцию векторного поля $\vec{F}$ по замкнутому контуру λ непосредственно и применив теорему Стокса к контуру λ и ограниченной им поверхностью σ с нормалью $\vec{n}$; 3) поток векторного поля $\vec{F}$ через полную поверхность пирамиды V в направлении внешней нормали к ее поверхности непосредственно и применив теорему Гаусса-Остроградского. Сделать чертеж.

Номер варианта	X	Y	Z	A	B	C	D
2.1.	$x+3y$	$x-4y+2z$	$3x+y+2z$	4	2	-1	1
2.2.	$x+y+z$	$6x-9y+z$	$x+3y$	-6	5	2	5
2.3.	$-x+5y$	$7x-15y+2z$	$x+y+z$	7	9	-6	9
2.4.	$y+5z$	$x-z$	$-x+5y$	2	8	3	8
2.5.	$x+6y$	$-x+6y-z$	$y+5z$	3	-7	5	7
2.6.	$-9x+z$	$15y-4z$	$x+6y$	-4	3	5	3
2.7.	$x+3z$	$2x-y-z$	$-9x+z$	1	9	-9	2
2.8.	$2x+6y$	$y+5z$	$x+3z$	5	-5	2	1
2.9.	$-5x+3z$	$x+6y$	$2x+6y$	8	6	-5	6
2.10.	$x-2y+z$	$-9x+z$	$-5x+3z$	-9	4	4	5
2.11.	$-6x+z$	$x+3z$	$x-2y+z$	3	9	-1	8
2.12.	$3x+y+2z$	$2x+6y$	$-6x+z$	-2	2	2	9
2.13.	$-5x+2z$	$-5x+3z$	$y+5z$	1	4	-8	5
2.14.	$-4x-2y+z$	$x-2y+z$	$x+6y$	8	8	-1	1
2.15.	$x-6z$	$-6x+z$	$-9x+z$	6	5	-1	2
2.16.	$y-4z$	$3x+y+2z$	$x+3z$	9	6	-1	6

Номер варианта	X	Y	Z	A	B	C	D
2.17.	$5x+y+4z$	$x+3y$	$2x+6y$	7	3	-1	3
2.18.	$-4x+15y$	$x+y+z$	$-5x+3z$	-3	-2	2	9
2.19.	$3x-5z$	$-x+5y$	$6x-9y+z$	2	6	-1	3
2.20.	$12x-4y$	$y+5z$	$7x-15y+2z$	-4	5	3	5
2.21.	$x-y+z$	$x+6y$	$x-z$	3	4	-7	3
2.22.	$7x+z$	$-9x+z$	$-x+6y-z$	6	2	-1	5
2.23.	$x+2y-5z$	$x+3z$	$15y-4z$	8	9	-1	9
2.24.	$x-4y+2z$	$2x+6y$	$2x-y-z$	7	5	-1	7
2.25.	$6x-9y+z$	$-5x+3z$	$y+5z$	-1	2	3	5
2.26.	$7x-15y+2z$	$x-2y+z$	$x+6y$	5	7	-9	6
2.27.	$x-z$	$-6x+z$	$-9x+z$	9	3	-2	2
2.28.	$-x+6y-z$	$3x+y+2z$	$x+3z$	4	6	-6	1
2.29.	$15y-4z$	$12x-4y$	$2x+6y$	3	9	-4	8
2.30.	$2x-y-z$	$x-y+z$	$x+3y$	-5	-2	1	4

3. Проверить, является ли векторное поле $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ потенциальным и соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{F}$ найти его потенциал.

Номер варианта	X	Y	Z
3.1.	$6x+7yz$	$6y+7xz$	$6z+7xy$
3.2.	$8x-5yz$	$8y-5xz$	$8z-5xy$
3.3.	$10x-3yz$	$10y-3xz$	$10z-3xy$
3.4.	$12x+yz$	$12y+xz$	$12z+xy$
3.5.	$4x-7yz$	$4y-7xz$	$4z-7xy$
3.6.	$x+2yz$	$y+2xz$	$z+2xy$
3.7.	$5x+4yz$	$5y+4xz$	$5z+4xy$
3.8.	$7x-2yz$	$7y-2xz$	$7z-2xy$
3.9.	$3x-yz$	$3y-xz$	$3z-xy$
3.10.	$9x+5yz$	$9y+5xz$	$9z+5xy$
3.11.	$5x-3yz$	$5y-3xz$	$5z-3xy$
3.12.	$2x+yz$	$2y+xz$	$2z+xy$
3.13.	$-x+yz$	$-y+xz$	$-z+xy$
3.14.	$7x-yz$	$7y-xz$	$7z-xy$
3.15.	$3x+5yz$	$3y+5xz$	$3z+5xy$
3.16.	$-2x+yz$	$-2y+xz$	$-2z+xy$
3.17.	$6x+yz$	$6y+xz$	$6z+xy$

Номер варианта	X	Y	Z
3.18.	$7x-3yz$	$7y-3xz$	$7z-3xy$
3.19.	$12x+3yz$	$12y+3xz$	$12z+3xy$
3.20.	$4x-8yz$	$4y-8xz$	$4z-8xy$
3.21.	$15x+2yz$	$15y+2xz$	$15z+2xy$
3.22.	$x+7yz$	$y+7xz$	$z+7xy$
3.23.	$5x+14yz$	$5y+14xz$	$5z+14xy$
3.24.	$17x-2yz$	$17y-2xz$	$17z-2xy$
3.25.	$3x-6yz$	$3y-6xz$	$3z-6xy$
3.26.	$9x+15yz$	$9y+15xz$	$9z+15xy$
3.27.	$5x-13yz$	$5y-13xz$	$5z-13xy$
3.28.	$-2x+3yz$	$-2y+3xz$	$-2z+3xy$
3.29.	$-x+8yz$	$-y+8xz$	$-z+8xy$
3.30.	$7x-6yz$	$7y-6xz$	$7z-6xy$

Список литературы

1. Квальвассер В.И., Фридман М.И. Теория поля. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление. – М.: Высшая школа, 1967. – 240 с.

2. Математический анализ: Контрольные задания для студентов-заочников/ Самарский гос. аэрокосмический ун-т.; Сост. Сметанникова Е.Н., Шахмистова О.В. Самара, 1999, 28 с.

3. Высшая математика: Методические указания и контрольные задания (с программой) для студентов-заочников инженерно-технических специальностей высших учебных заведений/ Артюнов Ю.С., Полозков А.П., Полозков Д.П.; Под ред. Ю.С. Артюнова. — М.: Высшая школа, 1985. – 144 с.

Учебное издание

Подклетнова Светлана Владимировна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И СИСТЕМЫ

Методические указания

Редактор

Самарский государственный
аэрокосмический университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.