МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

САМАРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методические указания по спецкурсу

Самара 1997

Министерство общего и профессионального образования РФ

Самарская Государственная Архитектурно-Строительная Академия

Кафедра высшей математики

Уравнения математической физики

Утверждены редакционно-издательским советом академии 10 января 1997 г.

Самара 1997

Составители: Ганиев В.С., Николаев Н.Я., Захарова Е.Н., Федоров И.Н.

УДК 517.14Э

Уравнения математической физики: Методические указания по спецкурсу /Сост.: Ганиев В.С., Николаев Н.Я., Захарова Е.Н., Федоров И.Н.; Самарск. арх.-строит. акад. Самара, 1997. 40 с.

Составлены в соответствии с программой курса высшей математики для архитектурно-строительных специальностей. В методических указаниях разработаны и подготовлены индивидуальные задания по темам:

1. Уравнения в частных производных. Приведение к каноническому виду.
2. Свободные колебания струны.
3. Теплопроводность стержня.
4. Задача Дирихле для круга.

Номер лицензии на издательскую деятельность ЛР №020726 от 3 февраля 1993 г.

1. Основные понятия

Математическая физика *представляет собой часть общей теории* дифференциальных уравнений с частными производными. Название "математическая физика" связано с тем, что эта часть математики возникла из рассмотрения многих важных задач физики, механики, техники. К уравнениям математической физики приводятся задачи о различных стационарных процессах (электростатика, магнетостатика, потенциальное движение несжимаемой жидкости и т.п.), о колебаниях сплошных сред и электромагнитных колебаниях, о теплопроводности, диффузии, распространении электромагнитных волн в проводящих средах, движении вязкой жидкости и многие другие задачи. Решению уравнений математической физики посвящены работы известнейших математиков прошлого: Эйлера, Даламбера, Лапласа, Римана, Фурье. Исследование дифференциальных уравнений с частными производными продолжается и по настоящее время.

Дифференциальным уравнением с частными производными называется уравнение относительно неизвестной функции нескольких переменных, ее аргументов и ее частных производных различных порядков. Если искомая функция u зависит от n переменных $x_1, x_2,\ldots,x_n$, т.е. $u=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, то дифференциальное уравнение с частными производными имеет вид

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right)=0, \qquad (1)$$

где F – заданная функция своих аргументов, $k_1+\ldots+k_n=k$.

Порядком дифференциального уравнения с частными призводными называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Решением дифференциального уравнения с частными производными (1) называется функция $u=u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, имеющая соответствующие частные производные и обращающая это уравнение в тождество (при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции и ее частных производных).

1.1 Простейшие дифференциальные уравнения с частными производными

Приведем примеры решения простейших дифференциальных уравнений в частных производных.

Пример 1. Решим уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $u = u(x;y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1. \qquad (2)$$

Разделим переменные: $\partial u = \partial x$; проинтегрируем обе части уравнения: $u = x + c$, где c – постоянная по отношению к переменной x, но в общем случае является произвольной функцией от переменной y, т.е. $u = x + c(y)$ – общее решение уравнения (2).

Проверка: подставим полученное решение в уравнение (2): $u_x' = 1$, так как $(C(y))_x' = 0$.

Пример 2. Найдем частное решение уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6xy, \qquad (3)$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$\text{при} \quad y = 1 \quad u = 5xu \qquad (4)$$

(условия в форме Коши).

Разделим переменные: $\partial U = 6xy\partial y$. Проинтегрируем обе части уравнения по y: $u = 3xy^2 + C(x)$. Получили общее решение уравнения (3). Подставим в него начальные условия и найдем соответствующее им $C(x)$: $5x = 3x \cdot 1 + C(x)$, $C(x) = 2x$.

Частное решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям (4): $u = 3xy^2 + 2x$.

Проверка: $u_y' = 6xy$, при $y = 1$ $u = 5x$.

Пример 3. Найдем частное решение уравнения второго порядка относительно функции $u(x,y)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x, \qquad (5)$$

удовлетворяющее начальным условиям: при $x = 1$ $u = \frac{y^3}{2}$, $u_x' = \frac{1}{2} + y^3$. Переписываем уравнение (5) в виде: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = x$. Разделим переменные: $\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = x\partial x$, проинтегрируем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2}{2} + c_1(y). \qquad (6)$$

Снова разделим переменные: $\partial u = \frac{x^2}{2}\partial x + c_1(y)\partial x$, проинтегрируем еще раз:

$$u = \frac{x^3}{6} + c_1(y) \cdot x + c_2(y). \qquad (7)$$

Получено общее решение уравнения (5). Найдем $c_1(y)$ и $c_2(y)$, подставив начальное условие в выражения (6) и (7): $c_1(y) = \frac{1}{2} + y^3 - \frac{1}{2}$ или $c_1(y) = y^3$; $c_2(y) = \frac{y^3}{2} - \frac{1}{6} - y^3$ или $c_2(y) = -\frac{1}{6} - \frac{y^3}{2}$. Итак, частное решение уравнения (5): $u = \frac{x^3}{6} + y^3x - \frac{y^3}{2} - \frac{1}{6}$.

Пример 4. Найдем общее решение дифференциального уравнения второго порядка относительно функции $u = u(x,y,z)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = y. \qquad (8)$$

Учитывая порядок дифференцирования при получении производной $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$,

представим уравнение (8) в виде: $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = y$. Разделим переменные: $\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = y\partial z$.

Проинтегрируем обе части по переменной z: $\frac{\partial u}{\partial x} = yz + c_1(x,y)$, где $c_1(x,y)$ – произвольная функция. Снова разделим переменные: $\partial u = yz\partial x + c_1(x,y)\partial x$ и проинтегрируем по x: $u = yzx + \int c_1(x,y)\partial x + c_2(y,z)$. Обозначим $\int c_1(x,y)\partial x = c_1^*(x,y)$. Тогда $u = xyz + c_1^*(x,y) + c_2(y,z)$. Получено общее решение уравнения (8).

Пример 5. Найти общее решение уравнения второго порядка относительно функции $u = u(x,y)$.

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \qquad (9)$$

Это однородное уравнение с постоянными коэффициентами. Его можно решить с помощью характеристического уравнения

$$3k^2 + 2k = 0.$$

Найдем его корни: $k(3k+2) = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = -\frac{2}{3}$.

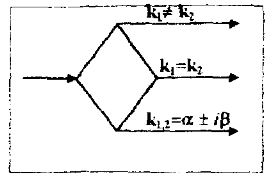
Соответственно, общее решение уравнения (9) будет иметь вид:

$$u = C_1(y)e^{k_1 x} + C_2(y)e^{k_2 x}$$

или $u = C_1(y) + C_2(y)e^{-\frac{2}{3}x}$.

Примечание. Схема решения однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$au''_{xx} + bu'_x + cu = 0 \to ak^2 + bk + c = 0$;



$u = c_1(y)e^{k_1 x} + c_2(y)e^{k_2 x}$;

$u = (c_1(y) + xc_2(y))e^{k_1 x}$;

$u = e^{\alpha x}(c_1(y)\cos\beta x + c_2(y)\sin\beta x)$.

Задания для самостоятельного решения или аудиторного занятия.

1. Найти общие решения дифференциальных уравнений относительно функции $u = u(x,y)$:

а) $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 3xy$;

в) $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 3$;

г) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

2. Найти частные решения дифференциальных уравнений:

а) $3\frac{\partial u}{\partial x} = y$, $u(0;y) = y^2$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\frac{\partial u}{\partial y} + 4u(x,y) = 0$, $u(0;y)$; $u'\left(0;y) = \frac{1}{y}\right)$.

1.2 Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка

Будем рассматривать дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка относительно функции u=u(x,y) двух переменных.

Уравнение с частными производными второго порядка называется линейным относительно старших производных, если оно имеет вид

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \qquad (10)$$

где A, B, C, F – известные функции своих аргументов.

Уравнение (10) называется уравнением гиперболического типа в данной области, если в этой области $B^2 - AC>0$; уравнением параболического типа, если $B^2 - AC=0$; уравнением эллиптического типа, если $B^2 - AC<0$.

Если выражение $B^2 - AC$ в данной области меняет знак, то уравнение (10) называется уравнением смешанного типа.

Примеры. Уравнение

$$(2+3\sin^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5x\frac{\partial u}{\partial x} - 7y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

является уравнением гиперболического типа на всей плоскости Oxy, так как для него $B^2 - AC = (-3\cos x)^2 - (2+3\sin^2 x)(-4) = 17 + 3\sin^2 x > 0$.

Уравнение

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y\frac{\partial u}{\partial x} + 3x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

является уравнением эллиптического типа в любой области, не содержащей точек осей координат (x=0, y=0), поскольку для него $B^2 - AC = 0 - x^2y^2 = -x^2y^2 < 0$, если $x \neq 0,\ y \neq 0$.

Уравнение

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

является уравнением параболического типа на всей плоскости Oxy, потому что $B^2 - AC = (xy)^2 - x^2y^2 \equiv 0$.

Уравнение

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - (1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} - 5\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

является уравнением смешанного типа, поскольку

$$B^2 - AC = (-xy)^2 + (1-x^2)(1+y^2) = 1 + y^2 - x^2.$$

Последнее выражение может быть положительным, отрицательным или нулем. В частности, $B^2-AC=0$ для всех точек гиперболы $x^2-y^2=1$, которая называется линией параболичности данного уравнения.

При исследовании линейных уравнений (10) важное значение имеют канонические формы уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов.

Введем обозначение $F = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$.

Уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = F$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F$ называются каноническими уравнениями гиперболического типа; уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F$ – каноническими уравнениями параболического типа; уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F$ – каноническим уравнением эллиптического типа.

Дифференциальное уравнение

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0$$

называется уравнением характеристик уравнения (10).

Уравнение характеристик можно записать также в форме

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0$$

или, решив как квадратное относительно dy:

$$\begin{cases} dy = \dfrac{B+\sqrt{B^2-AC}}{A}dx, \\ dy = \dfrac{B-\sqrt{B^2-AC}}{A}dx. \end{cases}$$

Для уравнения гиперболического типа уравнение характеристик имеет два интеграла: $\varphi(x,y) = C_1$, $\psi(x,y) = C_2$, т.е. существуют два семейства действительных характеристик. С помощью замены переменных $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ дифференциальное уравнение (10) приводится к каноническому виду.

Для уравнения параболического типа уравнение характеристик дает лишь один интеграл: $\varphi(x,y) = C$, т.е. оба семейства характеристик совпадают. В этом случае нужно провести замену переменных $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$, где $\psi(x,y)$ –

какая-нибудь функция, для которой $\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}\neq 0.$ После такой замены уравнение приводится к каноническому виду.

Пример 6. Решить уравнение

$$49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-14\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+14\frac{\partial u}{\partial x}-2\frac{\partial u}{\partial y}=0, \qquad (11)$$

приведя его вначале к каноническому виду.

Решение. Здесь $A=49,\ B=-7,\ C=1,\ B^2-AC=7^2-49\cdot 1=0;$ следовательно, уравнение (11) уравнение параболического типа. Составляем уравнение характеристик $49(dy)^2+14dxdy+(dx)^2=0$. Разделяя переменные и интегрируя, имеем $7dy=-dx$, т.е. $7y=-x+C_1$, $C_1=7y+x$. Обозначим $\xi=7y+x$, а за η возьмем функцию $\eta=y$. Это можно сделать, так как $\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}=1\cdot1-7\cdot0=1\neq 0.$ Выразим частные производные по старым переменным x и y через частные производные по новым переменным ξ и η: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}$, т.е. $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot1+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot0$, или окончательно:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y},\ \text{т.е.}\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot7+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot1;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot7+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot1\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot7+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot7+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}=$$

$$=49\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+7\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}+7\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=49\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+14\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\ \left(\text{т.к.}\ \frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\ldots\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\cdot7+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\cdot1$$

Подставив в уравнение (11) найденные для вторых производных выражения, получим:

$$49\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-14\left(7\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\right)+49\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+14\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+14\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)-2\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}7+\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0.$$

После приведения подобных членов будем иметь:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-2\frac{\partial u}{\partial\eta}=0\ \text{или}\ \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=2\frac{\partial u}{\partial\eta}. \qquad (12)$$

т.е. уравнение (11) приведено к каноническому виду.

Решим уравнение (12). Его можно решить с помощью характеристического уравнения (см. пример 5) $k^2-2k=0$.

Найдем его корни: $k(k-2)=0,\ k_1=0,\ k_2=2$. Соответственно, общее решение уравнения (12) будет иметь вид $u=c_1(\xi)e^{0\eta}+c_2(\eta)e^{2\eta}$. Возвращаясь к переменным x и y, получим общее решение уравнения (3): $u=c_1(7y+x)+c_2(7y+x)e^{2y}$.

Пример 7. Решить уравнение

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+5\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad (13)$$

приведя его вначале к каноническому виду.

Решение. Здесь $A=2,\ B=2{,}5,\ C=-3,\ B^2-AC=6{,}25+6>0;$ следовательно, уравнение (13) – гиперболического типа. Составляем уравнение характеристик $2(dy)^2-5dxdy-3(dx)^2=0;\quad 2dy(dy-3dx)+dx(dy-3dx)=0;(2dy+dx)(dy-3dx)=0;$ отсюда следует $2dy+dx=0$ или $dy-3dx=0$; т.е. уравнение характеристик имеет два интеграла: $2y+x=c_1$ и $y-3x=c_2$. С помощью замены переменных $\xi=2y+x$ и $\eta=y-3x$ уравнение (13) приводится к каноническому виду. Выразим частные производные по старым переменным x и y через частные производные по новым переменным ξ и η:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x},\ \text{т.е.}\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot1+\frac{\partial u}{\partial\eta}(-3);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y},\ \text{т.е.}\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot2+\frac{\partial u}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-3\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial u}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-3\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-3\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}=$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}-3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-3\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-3\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-3\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y}=$$

$$=2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-5\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}-3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(2\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(2\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y}=$$

$$=4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставив в уравнение (13) найденные для вторых производных выражения, получим:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+18\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+5\left(2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-5\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)-3\left(4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)=0;$$

$-40\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$, т.е. уравнение (13) приведено к каноническому виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0. \qquad (14)$$

Решим уравнение (14). Так как $\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=0$, то $\frac{\partial u}{\partial \xi}=c_1(\xi)$, где $c_1(\xi)$ – произвольная функция от ξ. Тогда $u=\int c_1(\xi)d\xi+c_2(\eta)$, где $c_2(\eta)$ – произвольная функция от η. Обозначим $\int c_1(\xi)d\xi=c_1^*(\xi)$, тогда решение уравнения (14): $u=c_1^*(\xi)+c_2(\eta)$. Возвращаясь к переменным x и y, получим общее решение уравнения (13): $u=c_1^*(2y+x)+c_2(y-3x)$, где, повторимся, $c_1^*(2y+x)$ и $c_2(y-3x)$ – произвольные дифференцируемые функции. Запишем какое-нибудь частное решение:

$$u=\sin^3(2y+x)+e^{5(y-3x)^2}.$$

Пример 8. Решить уравнение

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad (15)$$

приведя его вначале к каноническому виду.

Решение. Здесь $A=x^2$, $B=xy$, $C=y^2$, $B^2-AC\equiv 0$; следовательно, уравнение (15) – параболического типа.

Составляем уравнение характеристик $x^2(dy)^2-2xydxdy+y^2(dx)^2=0$ или $(xdy-ydx)^2=0$, т.е. $xdy-ydx=0$.

Разделяя переменные и интегрируя, имеем $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$, т.е. $\ln y=\ln x+\ln c_1$, $\frac{y}{x}=C_1$.

Обозначим $\xi=\frac{y}{x}$, а за η возьмем функцию $\eta=y$. Это можно сделать, ибо $\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}-\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\cdot 1-\frac{1}{x}\cdot 0=-\frac{y}{x^2}\neq 0$, если $y\neq 0$, $x\neq 0$.

Выразим частные производные по старым переменным через частные производные по новым переменным:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 0=-\frac{y}{x^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{1}{x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 1=\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)=\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=$$

$$=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Подставив в уравнение (15) найденные для вторых производных выражения, получим:

$$x^2\left(\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right)+2xy\left(-\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\right)+y^2\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)=0.$$

$y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0;\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0$, т.е. уравнение приведено к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0. \qquad (16)$$

Решим уравнение (16). Так как $\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0$, то $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}=\psi(\xi)$, где $\psi(\xi)$ – произвольная функция от ξ. Тогда $u=\int\psi(\xi)d\eta+\varphi(\xi)$, где $\varphi(\xi)$ – произвольная функция от ξ. Следовательно, $u=\psi(\xi)\eta+\varphi(\xi)$ – решение уравнения (16). Возвращаясь к переменным x и y, получим общее решение уравнения (15):

$$u=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+y\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Задания для самостоятельного решения или аудиторного занятия.

1. В следующих задачах установить тип уравнения и привести к каноническому виду:

1) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$ 2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2 x-2y\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$ 4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial x}+6\dfrac{\partial u}{\partial y}=0.$

5) $\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{1}{y^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

2. Выполнить задачи 1 и 2 индивидуального задания, приведенного в приложении.

2. УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

Струной называется тонкая нить, которая может свободно изгибаться. Пусть струна находится под действием сильного начального натяжения T_0. Если струну вывести из положения равновесия и подвергнуть действию какой-нибудь силы, то струна начнет колебаться (рис. 1).

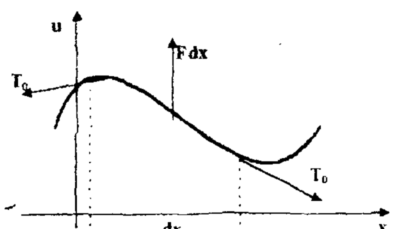


Рис. 1.

Ограничимся рассмотрением малых, поперечных и плоских колебаний струны, т.е. таких колебаний, при которых отклонения точек струны от положений покоя малы, в любой момент времени все точки струны находятся в одной и той же плоскости и каждая точка струны колеблется, оставаясь на одном и том же перпендикуляре к прямой, соответствующей состоянию покоя струны.

Принимая эту прямую за ось Ох, обозначим через $u=u(x,t)$ отклонения точек струны от положения равновесия в момент времени t. При каждом фиксированном значении t график функции $u=u(x,t)$ на плоскости Oxu дает форму струны в момент времени t.

Функция $u=u(x,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f, \qquad (17)$$

где $a^2=\dfrac{T_0}{\rho}$, $f=\dfrac{F}{\rho}$, ρ – масса единицы длины (линейная плотность) струны, F – сила, действующая на струну перпендикулярно оси абсцисс и рассчитанная на единицу длины.

Уравнение (17) называют уравнением вынужденных колебаний струны.

Если внешняя сила отсутствует ($f=0$), то получим уравнение свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (18)$$

Для полного определения движения струны нужно задать в начальный момент форму и скорость струны, т.е. положение ее точек и их скорость в виде функций абсцисс x этих точек. Пусть

$$u\big|_{t=0}=u(x,0)=\varphi(x);\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x). \qquad (19)$$

Эти условия называются начальными условиями задачи. Кроме начальных условий, должны быть заданы граничные (краевые) условия. Например, для струны, закрепленной на концах, граничные условия запишутся:

$$u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{x=l}=0. \qquad (19')$$

2.1. Решение уравнения колебаний бесконечной струны методом *характеристик (методом Даламбера)*

В случае бесконечной струны граничные условия (19′) не учитываются.

Приведя уравнение (18) к каноническому виду, получим уравнение $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$, где $\xi=x-at,\ \eta=x+at$.

Общее решение последнего уравнения запишется так: $u=\theta_1(\xi)+\theta_2(\eta),\ \xi=x-at,\ \eta=x+at$, где θ_1, θ_2 – произвольные функции.

Таким образом, решение дифференциального уравнения свободных колебаний имеет вид

$$u=\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at).$$

Подобрав функции θ_1 и θ_2 так, чтобы функция $u=u(x,t)$ удовлетворяла начальным условиям (19), *приходим к решению уравнения* (18) в виде

$$u=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi. \qquad (20)$$

Формулу (20) называют формулой Даламбера.

Пример 9. Найти форму струны, определяемой уравнением (18) в момент $t=\frac{\pi}{2a}$, если $u\big|_{t=0}=\sin x,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=1.$

Решение. Имеем $\varphi(x)=\sin x,\ \psi(x)\equiv 1$. Поэтому, применяя формулу (20), найдем:

$u=\frac{\sin(x+at)+\sin(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}d\xi$, т.е. $u=\sin x\cos at+t$. Если $t=\frac{\pi}{2a}$, то $u=\frac{\pi}{2a}$, струна параллельна оси абсцисс.

Задания для самостоятельного решения или аудиторного занятия.

1) Найти решение уравнения (18) ($a=1$), если $u\big|_{t=0}=x^2;\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0.$

2) Найти решение уравнения (18) ($a=2$), если $u\big|_{t=0}=0;\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=2}=x.$

3) Найти решение уравнения (18) ($a=1$), если $u\big|_{t=0}=x;\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=-x.$

4) Найти решение уравнения (18), если $u\big|_{t=0}=0;\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\cos x.$

5) Найти форму струны, определяемой уравнением (18) ($a=1$) в момент $t=\pi$, если $u\big|_{t=0}=\sin x,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\cos x.$

6) Выполнить индивидуальное задание 2, приведенное в приложении.

2.2. Решение уравнения колебания струны методом Фурье

Решение дифференциального уравнение (18), удовлетворяющее начальным условиям (19) и граничным (краевым) условиям

$$u\big|_{x=0}=0,\ u\big|_{x=l}=0, \qquad (21)$$

может быть представлено как сумма бесконечного ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad (22)$$

где

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\ b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx. \qquad (23)$$

Граничные условия (21) вводятся при изучении колебаний струны длины l, закрепленной в двух точках: $x=0$ и $x=l$.

Пример 10. Струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$, имеет в начальный

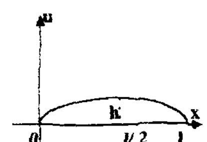


Рис. 2

момент форму параболы $u=\frac{4h}{l^2}x(l-x)$. Определить смещение точек струны от оси абсцисс, если начальные скорости отсутствуют (рис. 2).

<u>Решение</u>. Здесь $\varphi(x)=\frac{4h}{l^2}x(l-x)$; $\psi(x)=0$. Применяя формулы (23), находим:

$b_k=0$;

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{8h}{l^3}\int_0^l\left(lx-x^2\right)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Дважды интегрируя по частям, получим $a_k=\frac{16h}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right]$.

Подставляя выражения для a_k и b_k в равенство (22), будем иметь

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16h}{k^3\pi^3}\left[1-(-1)^k\right]\cos\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Но если k=2n, то $1-(-1)^k=0$, а если k=2n+1, то $1-(-1)^k=2$; поэтому окончательно имеем

$$u(x,t)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

<u>Задания для самостоятельного решения или аудиторного занятия.</u>

1) Дана струна, закрепленная на концах $x=0$ и $x=l$. Пусть в начальный момент форма струны имеет вид ломаной OAB, изображенной на рис. 3. Найти форму струны для любого момента времени t, если начальные скорости отсутствуют.

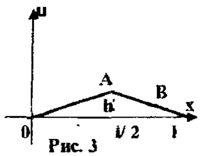


Рис. 3

2) В начальный момент времени струна, закрепленная на концах (в точках $x=0$ и $x=l$), расположена горизонтально, а ее точкам сообщена скорость

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases}\cos\frac{2\pi}{l}\left(x-\frac{l}{2}\right), & \left|x-\frac{l}{2}\right|<\frac{l}{4};\\ 0, & \left|x-\frac{l}{2}\right|>\frac{l}{4}.\end{cases}$$

Найти закон колебания струны.

2) Выполнить индивидуальное задание 3 из приложения.

3. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

3.1. Уравнение теплопроводности для нестационарного случая

Обозначим через $u=u(M,t)=u(x,y,z,t)$ температуру в точке $M(x,y,z)$ однородного тела, ограниченного поверхностью S, в момент времени t. Известно, что функция $u=u(x,y,z)$ удовлетворяет так называемому <u>уравнению теплопроводности для нестационарного случая</u>

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{24}$$

где $a^2=\frac{k}{\rho\gamma}$, k – коэффициент внутренней теплопроводности, ρ – плотность вещества, γ – коэффициент теплоемкости вещества.

Если тело является стержнем, направленным по оси Ox, то уравнение (24) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{25}$$

Рассмотрим задачу Коши для следующих трех случаев.

а) <u>Случай неограниченного стержня</u>. Ставится задача о нахождении решения $u(x,t)$ уравнения (25) при $t>0$, $-\infty<x<+\infty$, удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0)=f(x),\ -\infty<x<+\infty. \tag{26}$$

Применив метод Фурье, получаем решение этой задачи в виде

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi. \tag{27}$$

б) <u>Случай стержня, ограниченного с одной стороны</u>. Решение уравнения (25), удовлетворяющее начальному условию (26) при $0<x<+\infty$ и краевому условию

$$u(0,t)=\varphi(t),\ 0<t<+\infty, \tag{28}$$

выражается формулой

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty} f(\xi)\left[e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}}\right]d\xi+\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^t \varphi(\xi)e^{\frac{\xi^2}{4a^2(t-\xi)}}(t-\xi)^{-\frac{3}{2}}d\xi. \qquad (29)$$

в) <u>Случай стержня, ограниченного с обоих концов $x=0$ и $x=l$</u>. Здесь задача Коши состоит в том, чтобы найти решение уравнения (25), удовлетворяющее начальному условию (26) при $0<x<l$ и одному из краевых условий:

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0,\ 0<t<+\infty, \qquad (30)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0,\ 0<t<+\infty, \qquad (31)$$

$$u\big|_{x=0}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0, 0<t<+\infty, \qquad (32)$$

или

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ u\big|_{x=l}=0. \qquad (33)$$

Решение задачи (25), (26), (31) определяется формулой

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad (34)$$

где

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx; \qquad (35)$$

задачи (25), (26), (31) формулой

$$u(x,t)=\sum_{k=1} a_k e^{-\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 t}\cos\frac{k\pi x}{l}+a_0, \qquad (36)$$

где

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ a_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)dx; \qquad (37)$$

задачи (25), (26), (32) – формулой

$$u(x,t)=\sum_{k=1} b_k e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right)^2 t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}, \qquad (38)$$

где

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}dx; \qquad (39)$$

задачи (25), (26), (33) – формулой

$$u(x,t)=\sum_{k=1} a_k e^{-\left(\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\right)^2 t}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l}, \qquad (40)$$

где

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l}dx. \qquad (41)$$

<u>Пример 11</u>. Решить уравнение (25) при следующем начальном распределении температуры бесконечного стержня:

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases}u_0,\ x_1<x<x_2,\\ 0,\ x<x_1, x>x_2,\end{cases}\quad u_0=const.$$

<u>Решение</u>. Стержень бесконечен, поэтому решение запишется по формуле (27).

Так как $f(x)$ в интервале (x_1,x_2) равна постоянной температуре u_0, а вне интервала температура равна нулю, то решение примет вид

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi. \qquad (42)$$

Выразим полученный результат через специальную функцию $\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\mu^2}d\mu$, называемую <u>интегралом вероятностей</u>.

Положив $\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}=\mu$, $-\frac{1}{2a\sqrt{t}}d\xi=d\mu$, $d\xi=-2a\sqrt{t}d\mu$, получим

$$u(x,t) = -\frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu - \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu.$$

Таким образом, решение выразится формулой

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

Задания для самостоятельного решения или аудиторного занятия.

1) Дан тонкий однородный стержень длины l, изолированный от внешнего пространства и имеющий начальную температуру $f(x) = \frac{c}{l^2}x(l-x)$. Концы стержня поддерживаются при температуре, равной нулю. Определить температуру стержня в момент времени t>0 ($a=1$).

2) Найти закон остывания тонкого металлического стержня длины l, на левом конце которого поддерживается нулевая температура, если его боковая поверхность и правый конец теплоизолированы, а $u(x,0) = T_0 x$, где $T_0 = const$ ($a=1$).

3) Решить предыдущую задачу при условии, что теплоизолирована вся поверхность стержня, включая концы.

4) Найти решение уравнения (25), если левый конец полубесконечного стержня теплоизолирован, а начальное распределение температуры

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ u_0, & 0 < x < l, \\ 0, & x > l. \end{cases}$$

5) Выполнить индивидуальное задание 4 из приложения.

3.2. Уравнение теплопроводности для стационарного случая (уравнение Лапласа)

Уравнение теплопроводности (24) для стационарного (не зависящего от времени) случая обращается в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad (43)$$

так как $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Здесь $u = u(x,y,z)$ есть функция только точки и не зависит от времени.

Для задач, относящихся к плоским фигурам, уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (44)$$

Примечание. Вид (44) имеет уравнение Лапласа и для пространства, если u не зависит от координаты z, т.е. $u = u(M)$ сохраняет постоянное значение при перемещении точки M по прямой, параллельной оси Oz.

Заменой $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ уравнение (44) можно преобразовать к полярным координатам

$$\rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \rho\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \qquad (45)$$

С уравнением Лапласа связано понятие гармонической функции. Функцию называют гармонической в некоторой области D, если в этой области она непрерывна вместе со своими частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяет уравнению Лапласа. Так, для уравнения (43) функция $u = \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$, является гармонической в любой области пространства Oxyz, исключая точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Для любой плоской области такой функцией служит $u = \ln\frac{1}{r}$, т.е. эта функция удовлетворяет уравнению (44).

Задача отыскания функции u, гармонической в области D, непрерывной в D, включая и поверхность S, ограничивающую эту область и удовлетворяющую краевому условию $u|_S = f(M)$, где $f(M) = f(x,y,z)$ – заданная непрерывная на S функция, называется задачей Дирихле.

Пример 12. Найти стационарное распределение температуры в тонком стержне с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня $u|_{x=0} = u_0,\ u|_{x=l} = u_l$.

Решение. Задача Дирихле для одномерного случая состоит в отыскании из уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ функции $u = u(x)$, удовлетворяющей краевым условиям $u(0) = u_0,\ u(l) = u_l$. Общее решение указанного уравнения есть $u = Ax + B$. Учитывая краевые условия, получим $u = \frac{u_l - u_0}{l}x + u_0$, т.е. стационарное распределение температуры в тонком стержне с теплоизолированной боковой поверхностью линейно.

Задание для самостоятельного решения или аудиторного занятия.

Найти стационарное распределение тепла в пространстве между двумя цилиндрами с общей осью Oz при условии, что на поверхностях цилиндров поддерживается постоянная температура.

4. Задача Дирихле для круга

Пусть дан круг радиуса R с центром в полюсе O полярной системы координат. Будем искать функцию $u = u(\rho,\theta)$, гармоническую в круге и удовлетворяющую на его окружности условию $u|_{\rho=R} = f(\theta)$, где $f(\theta)$ – заданная функция, непрерывная на окружности. Искомая функция должна удовлетворять в круге уравнению Лапласа (45).

Применив метод Фурье, найдем решение задачи Дирихле для круга

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)\frac{R^2-\rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\tau-\theta)+\rho^2}\,d\tau. \tag{46}$$

Интеграл, стоящий в правой части формулы (46), называется интегралом Пуассона.

Пример 13. Найти стационарное распределение температуры на однородной тонкой пластине радиуса R, верхняя половина которой поддерживается при температуре 1°, а нижняя – при температуре 0°.

Решение. Если $-\pi < \tau < 0$, то $f(\tau) = 0$, а если $0 < \tau < \pi$, то $f(\tau) = 1$. Из формулы (46) получаем, что распределение температуры выражается интегралом

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2 - 2R\rho\cos(\tau-\theta)+\rho^2}\,d\tau.$$

Пусть точка (ρ,θ) расположена в верхнем полукруге, т.е. $0 < \tau < \pi$, тогда $\tau-\theta$ изменяется от $-\theta$ до $\pi-\theta$, и этот интервал длиной π не содержит точек $\pm\pi$. Поэтому введем подстановку $tg\frac{\tau-\theta}{2} = t$, откуда $\cos(\tau-\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $d\tau = \frac{2dt}{1+t^2}$. Тогда получаем

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-tg\frac{\theta}{2}}^{ctg\frac{\theta}{2}}\frac{R^2-\rho^2}{(R-\rho)^2+(R+\rho)^2t^2}\,dt = \frac{1}{\pi}arctg\left(\frac{R+\rho}{R-\rho}t\right)\Bigg|_{-tg\frac{\theta}{2}}^{ctg\frac{\theta}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[arctg\left(\frac{R+\rho}{R-\rho}ctg\frac{\theta}{2}\right) + arctg\left(\frac{R+\rho}{R-\rho}tg\frac{\theta}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}arctg\frac{\frac{R+\rho}{R-\rho}\left(ctg\frac{\theta}{2}+tg\frac{\theta}{2}\right)}{1-\left(\frac{R+\rho}{R-\rho}\right)^2} = -\frac{1}{\pi}arctg\frac{R^2-\rho^2}{2R\rho\sin\theta}$$

или $tg(\pi u) = -\frac{R^2-\rho^2}{2R\rho\sin\theta}$.

Так как правая часть отрицательна, то это означает, что u при $0<\theta<\pi$ удовлетворяет неравенствам $\frac{1}{2} < u < 1$. Для этого случая получаем решение $tg(\pi - u\pi) = \frac{R^2-\rho^2}{2R\rho\sin\theta}$ или

$$u = 1 - \frac{1}{\pi}arctg\frac{R^2-\rho^2}{2R\rho\sin\theta} \quad (0<\theta<\pi). \tag{47}$$

Если же точка расположена в нижнем полукруге, т.е. $\pi<\theta<2\pi$, то интервал $(-\theta;\pi-\theta)$ изменения $\tau-\theta$ содержит точку $-\pi$, но не содержит 0, и можно сделать подстановку $ctg\dfrac{\tau-\theta}{2}=t$, откуда $\cos(\tau-\theta)=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, $d\tau=-\dfrac{2dt}{1+t^2}$. Тогда для этих значений θ имеем

$$u(\rho,\theta)=-\frac{1}{\pi}\int_{-ctg\frac{\theta}{2}}^{tg\frac{\theta}{2}}\frac{R^2-\rho^2}{(R+\rho)^2+(R-\rho)\pi^2t^2}\,dt=-\frac{1}{\pi}\left[\mathrm{arctg}\left(\frac{R-\rho}{R+\rho}tg\frac{\theta}{2}\right)+arctg\left(\frac{R-\rho}{R+\rho}ctg\frac{\theta}{2}\right)\right].$$

Произведя аналогичные преобразования, найдем

$$u=-\frac{1}{\pi}arctg\frac{R^2-\rho^2}{2R\rho\sin\theta}\quad(\pi<\theta<2\pi). \qquad (48)$$

Так как правая часть теперь положительна ($\sin\theta<0$), то $0<u<\dfrac{1}{2}$.

Таким образом, решение поставленной задачи определяется формулами (47) и (48).

Задания для самостоятельного решения или аудиторного занятия.

1) Найти решение уравнения Лапласа для внутренней части кольца $1<\rho<2$, удовлетворяющее краевым условиям: $u|_{\rho=1}=0$, $u|_{\rho=2}=y$.

2) Выполнить индивидуальное задание 5, которое приводится в приложении.

Приложение

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание N1

Задача 1. Найти общее решение дифференциального уравнения параболического типа, приведя его к каноническому виду.

1. $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+u_x+u_y=0.$
2. $u_{xx}+4u_{xy}+4u_{yy}-u_x-2u_y=0.$
3. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+2u_x-2u_y=0.$
4. $u_{xx}+6u_{xy}+9u_{yy}+u_x+3u_y=0.$
5. $u_{xx}-6u_{xy}+9u_{yy}-2u_x+6u_y=0.$
6. $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}-3u_x-3u_y=0.$
7. $u_{xx}-4u_{xy}+4u_{yy}+3u_x-6u_y=0.$
8. $9u_{xx}+6u_{xy}+u_{yy}-9u_x-3u_y=0.$
9. $u_{xx}+8u_{xy}+16u_{yy}-u_x-4u_y=0.$
10. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+4u_x-4u_y=0.$
11. $16u_{xx}+8u_{xy}+u_{yy}-8u_x-2u_y=0.$
12. $4u_{xx}+4u_{xy}+u_{yy}+8u_x+4u_y=0.$
13. $u_{xx}-8u_{xy}+16u_{yy}+3u_x-12u_y=0.$
14. $9u_{xx}+6u_{xy}+u_{yy}-12u_x-4u_y=0.$
15. $16u_{xx}+8u_{xy}+u_{yy}-16u_x+4u_y=0.$
16. $u_{xx}+10u_{xy}+25u_{yy}+u_x+5u_y=0.$
17. $u_{xx}+2u_{xy}+u_{yy}+5u_x+5u_y=0.$
18. $u_{xx}-10u_{xy}+25u_{yy}+2u_x-10u_y=0.$
19. $4u_{xx}-4u_{xy}+u_{yy}-10u_x+5u_y=0.$
20. $25u_{xx}-10u_{xy}+u_{yy}-15u_x+3u_y=0.$
21. $u_{xx}+6u_{xy}+9u_{yy}+5u_x+15u_y=0.$
22. $25u_{xx}+10u_{xy}+u_{yy}+20u_x+4u_y=0.$
23. $u_{xx}+8u_{xy}+16u_{yy}+5u_x+20u_y=0.$
24. $u_{xx}-10u_{xy}+25u_{yy}+5u_x-25u_y=0.$
25. $u_{xx}+12u_{xy}+36u_{yy}+u_x+6u_y=0.$
26. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+6u_x-6u_y=0.$
27. $u_{xx}-12u_{xy}+36u_{yy}+2u_x-12u_y=0.$

28. $36u_{xx} + 12u_{xy} + u_{yy} + 18u_x + 3u_y = 0.$
29. $u_{xx} + 14u_{xy} + 49u_{yy} + 2u_x + 14u_y = 0.$
30. $36u_{xx} - 12u_{xy} + u_{yy} + 18u_x - 3u_y = 0.$

Задача 2. Найти общее решение дифференциального уравнения гиперболического типа, приведя его к каноническому виду.

1. $4u_{xx} + 8u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$	2. $3u_{xx} + 8u_{xy} + 4u_{yy} = 0.$
3. $3u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0.$	4. $u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$
5. $16u_{xx} + 16u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$	6. $3u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} = 0.$
7. $25u_{xx} + 20u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$	8. $u_{xx} + 8u_{xy} + 12u_{yy} = 0.$
9. $12u_{xx} + 8u_{xy} + u_{yy} = 0.$	10. $49u_{xx} + 28u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$
11. $64u_{xx} + 32u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$	12. $3u_{xx} + 20u_{xy} + 25u_{yy} = 0.$
13. $u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0.$	14. $2u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy} = 0.$
15. $u_{xx} + 12u_{xy} + 27u_{yy} = 0.$	16. $u_{xx} + 16u_{xy} + 48u_{yy} = 0.$
17. $u_{xx} + 20u_{xy} + 75u_{yy} = 0.$	18. $u_{xx} + 24u_{xy} + 108u_{yy} = 0.$
19. $u_{xx} + 28u_{xy} + 147u_{yy} = 0.$	20. $u_{xx} + 32u_{xy} + 192u_{yy} = 0.$
21. $u_{xx} + 36u_{xy} + 243u_{yy} = 0.$	22. $3u_{xx} + 28u_{xy} + 49u_{yy} = 0.$
23. $3u_{xx} + 32u_{xy} + 64u_{yy} = 0.$	24. $27u_{xx} + 12u_{xy} + u_{yy} = 0.$
25. $48u_{xx} + 16u_{xy} + u_{yy} = 0.$	26. $75u_{xx} + 20u_{xy} + u_{yy} = 0.$
27. $108u_{xx} + 24u_{xy} + u_{yy} = 0.$	28. $147u_{xx} + 28u_{xy} + u_{yy} = 0.$
29. $192u_{xx} + 32u_{xy} + u_{yy} = 0.$	30. $4u_{xx} + 3u_{xy} - u_{yy} = 0.$

Задание N2

Методом Даламбера найти уравнение $u = u(x, t)$ формы однородной бесконечной струны, определяемой волновым уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если в начальный момент $t_0 = 0$ заданы форма и скорость струны.

1. $a = 1;$ $u|_{t=0} = \frac{\sin x}{x};$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0.$
2. $a = 2;$ $u|_{t=0} = \sin\frac{x}{2};$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{x}{1+x^2}.$
3. $a = 3;$ $u|_{t=0} = \cos x;$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x^2.$
4. $a = 4;$ $u|_{t=0} = \frac{x}{1+x^2};$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin x.$
5. $a = 5;$ $u|_{t=0} = x^2;$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2}.$
6. $a = 1;$ $u|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2};$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \cos x.$
7. $a = \frac{1}{2};$ $u|_{t=0} = e^{-x^2};$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = (x-1)^2.$
8. $a = \frac{1}{3};$ $u|_{t=0} = \cos 2x;$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin\frac{x}{2}.$
9. $a = \frac{1}{4};$ $u|_{t=0} = 4\pi;$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x.$
10. $a = \frac{1}{5};$ $u|_{t=0} = x(2-x);$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = e^{-x}.$
11. $a = 1;$ $u|_{t=0} = x^2;$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin 3x.$
12. $a = 2;$ $u|_{t=0} = e^x;$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \omega x.$
13. $a = 3;$ $u|_{t=0} = \sin x;$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = v_0.$
14. $a = 4;$ $u|_{t=0} = \sin\frac{x}{3};$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \cos x.$
15. $a = 5;$ $u|_{t=0} = x^3;$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin x \cos x.$
16. $a = \frac{3}{2};$ $u|_{t=0} = x(\frac{3}{2} - x);$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{2}{3}x.$
17. $a = \frac{2}{3};$ $u|_{t=0} = e^{\frac{1}{2}x};$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{2}{4+x^2}.$
18. $a = \frac{5}{2};$ $u|_{t=0} = x(x - \frac{5}{2});$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = e^x.$
19. $a = \frac{4}{5};$ $u|_{t=0} = e^{-x};$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 2\pi.$
20. $a = \frac{3}{4};$ $u|_{t=0} = x - \frac{\pi}{3};$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{\pi}{3}.$
21. $a = \frac{4}{3};$ $u|_{t=0} = \frac{1}{4}\cos\frac{x}{4};$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \sin 3x.$
22. $a = \frac{1}{4};$ $u|_{t=0} = \frac{x^2}{2};$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 2x - 1.$
23. $a = 2;$ $u|_{t=0} = (x-2)^2;$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 2 - 4x.$
24. $a = 1;$ $u|_{t=0} = 3x - 1;$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \cos\frac{x}{3}.$
25. $a = 1;$ $u|_{t=0} = 3 - 2x;$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = e^{\frac{x}{3}}.$
26. $a = 2,5;$ $u|_{t=0} = e^{-2x};$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 2x + 3.$
27. $a = 4;$ $u|_{t=0} = \frac{1}{4+x^2};$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 2\pi x.$
28. $a = 2;$ $u|_{t=0} = \frac{\pi x}{2};$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \frac{x-3}{2}.$
29. $a = 5;$ $u|_{t=0} = x - 5;$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \cos\frac{x}{5}.$
30. $a = 1;$ $u|_{t=0} = 3x^2;$ $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = e^{-2x}.$

Задание N3

Найти закон колебания $u(x,t)$ однородной струны длины l с закрепленными концами, если ее начальное положение $u(x,0)$, а начальная скорость точек струны $v(x,0)$;a- параметр в уравнении колебания струны, зависящий от натяжения и линейной плотности струны.

1. $a = 2;$ $l = \pi;$ $u(x,0) = 0,1\sin x;$ $v(x,0) = \cos\frac{x}{2}.$

2. $a = 1$; $l = 10$; $u(x,0) = 0$; $v(x,0) = v_0 x,$ $(v_0 = const).$

3. $a = 1$; $l = 5$; $u(x,0) = \frac{x(5-x)}{49}$; $v(x,0) = 0.$

4. $a = 3$; $l = 5$; $u(x,0) = 0$; $v(x,0) = 3(5-x).$

5. $a = 1$; $l = 4$; $u(x,0) = \begin{cases} -\frac{x}{4}, & \text{при } 0 \le x < 2, \\ \frac{x}{4} - 1 & \text{при } 2 \le x \le 4; \end{cases}$ $v(x,0) = 0.$

6. $a = 3$; $l = 2$; $u(x,0) = 0$; $v(x,0) = x^2.$

7. $a = 1$; $l = 8$; $u(x,0) = 0$; $v(x,0) = \begin{cases} v_0, & \text{при } |x-4| \le 2, \\ 0, & \text{при } |x-4| > 2; \end{cases}$ $(v_0 = const).$

8. $a = 3$; $l = 3$; $u(x,0) = \begin{cases} -0,05x, & \text{при } 0 \le x < 2, \\ 0,1x - 0,3, & \text{при } 2 \le x \le 8; \end{cases}$ $v(x,0) = 0.$

9. $a = 2$; $l = 4$; $u(x,0) = 0$; $v(x,0) = \begin{cases} \cos\frac{\pi(x-2)}{2}, & \text{при } |x-2| \le 1, \\ 0,1x - 3, & \text{при } |x-2| > 1. \end{cases}$

10. $a = 4$; $l = 3$; $u(x,0) = 5\sin\frac{\pi x}{3}$; $v(x,0) = 0.$

11. $a = 1$; $l = 2$; $u(x,0) = 0$; $v(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & \text{при } 1 < x \le 2. \end{cases}$

12. $a = 1$; $l = 6$; $u(x,0) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & \text{при } 0 \le x \le 2, \\ \frac{x-6}{4}, & \text{при } 2 < x < 6; \end{cases}$ $v(x,0) = 0.$

13. $a = 3$; $l = \pi$; $u(x,0) = 0,2\sin x$; $v(x,0) = 3\cos\frac{x}{2}.$

14. $a = 3$; $l = 2$; $u(x,0) = \frac{x(2-x)}{16}$; $v(x,0) = 0.$

15. $a = 1$; $l = 4$; $u(x,0) = 0$; $v(x,0) = \begin{cases} v_0 x, & \text{при } 0 \le x < 2, \\ v_0(4 - x), & \text{при } 2 \le x \le 4; \end{cases}$ $(v_0 = const).$

16. $a = 1$; $l = 2$; $u(x,0) = x(x-2)$; $v(x,0) = 0.$

17. $a = 5$; $l = 3$; $u(x,0) = 0$; $v(x,0) = 5(3-x).$

18. $a = 2$; $l = 4$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{при } 0 \le x < 2, \\ 2 - \frac{x}{2}, & \text{при } 2 \le x \le 4; \end{cases}$ $v(x,0) = 0.$

19. $a = 3$; $l = 4$; $u(x,0) = 0$; $v(x,0) = \begin{cases} 6, & \text{при } |x-2| \le 1, \\ 0, & \text{при } |x-2| > 1. \end{cases}$

20. $a = \frac{1}{4}$; $l = \frac{1}{2}$; $u(x,0) = x(x - \frac{1}{2})$; $v(x,0) = 0.$

21. $a = 1$; $l = 2$; $u(x,0) = 0$; $v(x,0) = \begin{cases} \cos\pi(x-1), & \text{при } |x-1| \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{при } |x-1| > \frac{1}{2}. \end{cases}$

22. $a = 1$; $l = 2\pi$; $u(x,0) = 0,5\sin\frac{x}{2}$; $v(x,0) = \cos\frac{x}{4}.$

23. $a = \frac{1}{2}$; $l = 6$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{при } 0 \le x < 2, \\ \frac{6-x}{4}, & \text{при } 2 \le x \le 6; \end{cases}$ $v(x,0) = 0.$

24. $a = 1$; $l = 8$; $u(x,0) = 0$; $v(x,0) = 8 - x.$

25. $a = \frac{4}{9}$; $l = \frac{2}{3}$; $u(x,0) = x(x - \frac{2}{3})$; $v(x,0) = 0.$

26. $a = 2$; $l = 4$; $u(x,0) = 0$; $v(x,0) = \begin{cases} 4 - x, & \text{при } 0 \le x < 2, \\ 0, & \text{при } 2 \le x \le 4. \end{cases}$

27. $a = \frac{1}{2}$; $l = 1$; $u(x,0) = \frac{x(1-x)}{8}$; $v(x,0) = 0.$

28. $a = 1$; $l = 4$; $u(x,0) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & \text{при } 0 \le x < 3, \\ 4 - x, & \text{при } 3 \le x \le 4; \end{cases}$ $v(x,0) = 0.$

29. $a = 2$; $l = 6$; $u(x,0) = 0$; $v(x,0) = \begin{cases} 3x, & \text{при } 0 \le x < 3, \\ 3(6 - x), & \text{при } 3 \le x \le 6. \end{cases}$

30. $a = 3$; $l = 2$; $u(x,0) = 5\sin\frac{\pi x}{2}$; $v(x,0) = 0.$

Задание N4

1. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного по всей поверхности стержня длины $l = 3$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & 0 \le x \le \frac{3}{2}, \\ 3 - x, & \frac{3}{2} \le x \le 3. \end{cases}$$

2. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного на *левом конце и боковой поверхности* стержня длины $l = 2$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2, \end{cases}$$

а на правом конце поддерживается нулевая температура.

3. Найти закон изменения температуры тонкого стержня длины $l = 5$, на левом конце которого поддерживается нулевая температура, если его боковая поверхность и правый конец теплоизолированы, а: $\frac{\partial u}{\partial t} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{5}, & 0 \le x \le \frac{5}{2}, \\ 5 - x, & \frac{5}{2} \le x \le 5. \end{cases}$$

4. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного по боковой поверхности стержня длины $l = 4$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \le x \le 2, \\ 4 - x, & 2 \le x \le 4, \end{cases}$$

а на концах поддерживается нулевая температура.

5. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного по всей поверхности стержня длины $l = 5$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{5}, & 0 \le x \le \frac{5}{2}, \\ 5 - x, & \frac{5}{2} \le x \le 5. \end{cases}$$

6. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного на левом конце и боковой поверхности стержня длины $l = 3$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{3}, & 0 \le x \le \frac{3}{2}, \\ 3 - x, & \frac{3}{2} \le x \le 3, \end{cases}$$

а на правом конце поддерживается нулевая температура.

7. Найти закон изменения температуры тонкого стержня длины $l = 8$,на левом конце которого поддерживается нулевая температура, если его боковая поверхность и правый конец теплоизолированы, а: $\frac{\partial u}{\partial t} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & 0 \le x \le 4, \\ 8 - x, & 4 \le x \le 8. \end{cases}$$

8. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного по боковой поверхности стержня длины $l = 2$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2, \end{cases}$$

а на концах поддерживается нулевая температура.

9. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного по всей поверхности стержня длины $l = 1$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

10. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного на левом конце и боковой поверхности стержня длины $l = 4$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 < x \le 2, \\ 4 - x, & 2 \le x \le 4, \end{cases}$$

а на правом конце поддерживается нулевая температура.

11. Найти закон изменения температуры тонкого стержня длины $l = 10$,на левом конце которого поддерживается нулевая температура, если его боковая поверхность и правый конец теплоизолированы, а: $\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{5}, & 0 \le x \le 5, \\ 10 - x, & 5 \le x \le 10. \end{cases}$$

12. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного по боковой поверхности стержня длины $l = 9$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{9}, & 0 \le x \le \frac{9}{2}, \\ 9 - x, & \frac{9}{2} < x \le 9, \end{cases}$$

а на концах поддерживается нулевая температура.

13. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного по боковой поверхности стержня длины $l = 3$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{3}, & 0 \le x \le \frac{3}{2}, \\ 3 - x, & \frac{3}{2} \le x \le 3, \end{cases}$$

а на концах поддерживается нулевая температура.

14. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного на левом конце и боковой поверхности стержня длины $l = 5$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{5}, & 0 \le x \le \frac{5}{2}, \\ 5 - x, & \frac{5}{2} \le x \le 5, \end{cases}$$

а на правом конце поддерживается нулевая температура.

15. Найти закон изменения температуры тонкого стержня длины $l = 7$,на левом конце которого поддерживается нулевая температура, если его боковая поверхность и правый конец теплоизолированы, а: $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{7}, & 0 \le x \le \frac{7}{2}, \\ 7 - x, & \frac{7}{2} \le x \le 7. \end{cases}$$

16. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного по боковой поверхности стержня длины $l = 1$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \le x \le 1, \end{cases}$$

а на концах поддерживается нулевая температура. 17. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного по всей поверхности стержня длины $l = 4$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \le x \le 2, \\ 4 - x, & 2 \le x \le 4. \end{cases}$$

18. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного на левом конце и боковой поверхности стержня длины $l = 10$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{5}, & 0 \le x \le 5, \\ 10 - x, & 5 \le x \le 10, \end{cases}$$

а на правом конце поддерживается нулевая температура.

19. Найти закон изменения температуры тонкого стержня длины $l = 2$,на левом конце которого поддерживается нулевая температура, если его боковая поверхность и правый конец теплоизолированы, а: $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

20. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного по боковой поверхности стержня длины $l = 8$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & 0 \le x \le 4, \\ 8 - x, & 4 \le x \le 8, \end{cases}$$

а на концах поддерживается нулевая температура.

21. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного по всей поверхности стержня длины $l = 1$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

22. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного на левом конце и боковой поверхности стержня длины $l = 4$, если:

$\frac{\partial u}{\partial t} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \le x \le 2, \\ 4 - x, & 2 \le x \le 4, \end{cases}$$

а на правом конце поддерживается нулевая температура.

23. Найти закон изменения температуры тонкого стержня длины $l = 6$,на левом конце которого поддерживается нулевая температура, если его боковая поверхность и правый конец теплоизолированы, а: $\frac{\partial u}{\partial t} = 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & 0 \le x \le 3, \\ 6 - x, & 3 \le x \le 6. \end{cases}$$

24. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного по боковой поверхности стержня длины $l = 1$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \le x \le 1, \end{cases}$$

а на концах поддерживается нулевая температура.

25. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного по всей поверхности стержня длины $l = 5$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{5}, & 0 \le x \le \frac{5}{2}, \\ 5 - x, & \frac{5}{2} \le x \le 5. \end{cases}$$

26. Найти закон изменения температуры тонкого стержня длины $l = 7$,на правом конце которого поддерживается нулевая температура, если его боковая поверхность и левый конец теплоизолированы, а: $\frac{\partial u}{\partial t} = 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{7}, & 0 \le x \le \frac{7}{2}, \\ 7 - x, & \frac{7}{2} \le x \le 7. \end{cases}$$

27. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного по всей поверхности стержня длины $l = 8$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & 0 \le x \le 4, \\ 8 - x, & 4 \le x \le 8. \end{cases}$$

28. Найти закон изменения температуры тонкого стержня длины $l = 9$,на левом конце которого поддерживается нулевая температура, если его боковая поверхность и правый конец теплоизолированы, а:

$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{9}, & 0 \le x \le \frac{9}{2}, \\ 9 - x, & \frac{9}{2} \le x \le 9. \end{cases}$$

29. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного по боковой поверхности стержня длины $l = 10$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{x^2}{5}, & 0 \le x \le 5, \\ 10 - x, & 5 \le x \le 10, \end{cases}$$

а на концах поддерживается нулевая температура.

30. Найти закон изменения температуры тонкого изолированного по всей поверхности стержня длины $l = 2$, если: $\frac{\partial u}{\partial t} = 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$$u(x,0) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Задание N5

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

1. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 1,\ u|_{\rho=1} = \varphi^2 + \varphi + 1.$
2. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 2,\ u|_{\rho=2} = \varphi^2 - \varphi.$
3. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 1,\ u|_{\rho=1} = 2\varphi^2 + 3\varphi + 5.$
4. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 2,\ u|_{\rho=2} = \varphi^2 + 5\varphi + 7.$
5. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 3,\ u|_{\rho=3} = \varphi^2.$
6. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 1,\ u|_{\rho=1} = 3\varphi^2 + \varphi + 2.$
7. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 4,\ u|_{\rho=4} = 5\varphi^2 + 2\varphi + 2.$
8. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 2,\ u|_{\rho=2} = 4\varphi^2 + 3\varphi + 1.$
9. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 1,\ u|_{\rho=1} = \varphi^2.$
10. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 2,\ u|_{\rho=2} = 3\varphi^2 - \varphi - 1.$
11. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 1,\ u|_{\rho=1} = 2\varphi^2 - 5\varphi - 2.$
12. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 2,\ u|_{\rho=2} = 4\varphi^2 - 3\varphi + 1.$
13. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 2,\ u|_{\rho=2} = 5\varphi^2 - 2\varphi + 1.$
14. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 2,\ u|_{\rho=2} = \varphi^2 - 5\varphi.$
15. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 3,\ u|_{\rho=3} = -\varphi^2 + 3\varphi.$
16. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 3,\ u|_{\rho=3} = -2\varphi^2 + 7.$

17. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 2,\ u|_{\rho=2} = \varphi^2 - 3\varphi + 4.$
18. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 1,\ u|_{\rho=1} = \varphi^2 + 7\varphi - 1.$
19. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 2,\ u|_{\rho=2} = 10\varphi^2 - 2\varphi - 1.$
20. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 1,\ u|_{\rho=1} = 6\varphi^2 - 5\varphi + 3.$
21. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 1,\ u|_{\rho=1} = -3\varphi^2 + 5\varphi - 2.$
22. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 3,\ u|_{\rho=3} = \varphi^2 + 2\varphi.$
23. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 4,\ u|_{\rho=4} = \varphi^2 - \varphi.$
24. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 1,\ u|_{\rho=1} = 3\varphi^2 + 2\varphi - 2.$
25. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 2,\ u|_{\rho=2} = -4\varphi^2 - 3\varphi + 1.$
26. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 1,\ u|_{\rho=1} = -\varphi^2 + \varphi - \pi.$
27. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 2,\ u|_{\rho=2} = 5\varphi^2 - \varphi + \pi.$
28. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 1,\ u|_{\rho=1} = -6\varphi^2 + \varphi - 2.$
29. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 2,\ u|_{\rho=2} = 6\varphi^2 + 3\varphi + 1.$
30. $\Delta u = 0,\ 0 \le \rho < 4,\ u|_{\rho=4} = \varphi^2 - 4\varphi + 2.$

Библиографический список

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

2. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. М.: Высшая школа, 1983.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа, 1980.

4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.2. М.: Наука, 1978.

Содержание

Составители: Ганиев В.С., Николаев Н.Я., Захарова Е.Н., Федоров И.Н.

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Методические указания по спецкурсу

Редактор Г.Ф. Коноплина

Технический редактор А.И. Непогодина

Корректор Е.М. Исаева

Подписано в печать 17.04.97. Формат 60×84 1/16.

Бумага оберточная белая. Печать оперативная.

Уч.-изд. л. 2,55. Усл. печ. л. 2,59. Тираж 100 экз.

Самарская государственная архитектурно-строительная академия

443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

Отпечатано в типографии ТОО "СВИР",
лиц. "Роскомпечати" ПЛД 25-67, 05.97г.
<u>Телефон стола заказов</u> : 33-43-29.